

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA IV
CURSOS: Eng. Mecânica, Eng. Química, Química, Eng. Biológica
1ª Época – 6/V/00 Duração: 1h30mn
Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

I – (6 valores) Considere a função complexa de variável complexa definida por:

$$g(z) = i\bar{z}^2 + \bar{z}$$

- (a) Determine a parte real $u(x, y)$ e a parte imaginária $v(x, y)$ de $g(z)$ e o conjunto de pontos em que estas funções satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função $g(z)$?
- (b) Mostre que estas funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são harmónicas e determine uma função $f(z)$ analítica em $\mathbb{C}$, cuja parte real coincide com a parte real $u(x, y)$ da função $g(z)$ e tal que $f(0) = i$.
- (c) Utilizando a função $f(z)$ determinada na alínea anterior ¹, calcule:

i) $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz$

ii) $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz$

(Considere o sentido positivo.)

II – (7 valores)

1. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(in)^n} z^{-2n+1}.$$

- (a) Determine a região de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(in)^n} z^{-2n+1}$.
- (b) Indique e classifique as singularidades da função $f(z)$.
- (c) Calcule os resíduos de $f(z)$ nas singularidades situadas no semiplano $\text{Im}(z) \geq 0$.
- (d) Utilize o Teorema dos Resíduos e o Lema de Jordan para calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

VIRE, SE FAZ FAVOR

¹Caso não tenha resolvido a alínea I (b) utilize a seguinte função analítica:

$$f(x + iy) = x - 2xy + i(x^2 + y - y^2 + 1).$$

III (4 valores)

- (a) Calcule a solução (diferenciável em $[-1, +\infty[$) do seguinte problema de valor inicial:

$$y' + 2t y = b(t) \ , \quad y(-1) = 0 \ ,$$

onde

$$b(t) = \begin{cases} t & , \text{ se } t \in [-1, 0] \\ 0 & , \text{ se } t \in [0, +\infty[\end{cases} \ .$$

- (b) Determine o intervalo máximo de definição da solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y' = t^2 y^2 + t^2 \ , \quad y(0) = 1 \ .$$

IV – (3 valores) Seja $f(z)$ uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1 + i, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

- (a) Mostre que existem duas funções $g_1(z)$ e $g_2(z)$, analíticas no círculo $|z| < \sqrt{2}$, tais que $g_2(0) = 0$ e

$$f(z) = g_1(z) + g_2(1/z) \ ,$$

para qualquer z no anulo $\frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < \sqrt{2}$.

- (b) Para cada $w \in \mathbb{C}$, tal que $|w| \neq 1$, relacione as funções g_1 e g_2 com o integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-w} dz \ .$$

(Considere o sentido positivo.)