

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA IV
CURSOS: Eng. Mecânica, Eng. Química, Química, Eng. Biológica
12/VII/00 Duração: 3 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

I – (2,5 v.) Seja $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Considere a função complexa de variável complexa f definida por:

$$f(x + iy) = x^2 + ay^2 + b + i v(x, y)$$

1. Determine a , b e v de modo a que f seja analítica em $\mathbb{C}$ e $f(0) = 1 + i$.
2. Utilizando a função $f(z)$ determinada na alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz.$$

(Considere o sentido positivo.)

II – (4 v.) Considere a função

$$f(z) = \frac{z^3}{2z^2 - 5z + 2} + (z^2 - 1) \operatorname{sen} \frac{i}{z}.$$

1. Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função $(z^2 - 1) \operatorname{sen} \frac{i}{z}$ na região $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Indique e classifique as singularidades da função $f(z)$.
3. Calcule os resíduos de $f(z)$ nestas singularidades.
4. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{4 \cos(\theta) - 5} d\theta.$$

Sugestão: $\cos(3\theta) = \operatorname{Re} \left[(e^{i\theta})^3 \right]$.

III – (3 v.) Para cada um dos seguintes problemas de valor inicial, determine a solução $y(t)$, indique o seu intervalo máximo de definição e o valor de $y(2)$.

1. $t + y + (t - y) y' = 0$; $y(0) = -1$.
2. $y' = \frac{1}{t^2 y - t^2}$; $y(1) = -1$.

VIRE, SE FAZ FAVOR

IV – (3 v.) Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calcule $e^{t\mathbf{A}}$.
2. Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\text{onde } \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} -e^t & -e^t \end{bmatrix}^T.$$

V – (1,5 v.) Determine a solução geral do seguinte problema:

$$y''' - y' = e^t$$

VI – (3 v.)

1. Determine a série de Fourier da função $f(x) = |x|$ no intervalo $[-1, 1]$.
2. Resolva a equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + t u, & x \in]0, 1[, \ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x, & x \in]0, 1[. \end{cases}$$

VII – (1,5 v.) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' + 2y' \sin y \cos y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

Sugestão: Determine uma função $v(y)$ tal que $y' = v(y)$.

VIII – (1,5 v.) Seja f uma função complexa de variável complexa. Mostre que se

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1) \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f^{(n+1)}(z_0)} \right| \right]$$

existir e for finito, então f tem uma singularidade não removível num ponto z tal que $|z - z_0| = L$.