Resolução problema 3 da ficha 1 de Programação Matemática

Problema: (a) Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $p \in \mathbb{R}^n$ tal que o invólucro cónico de $C - p$, $\text{cone}(C - p)$, é todo o $\mathbb{R}^n$. Mostre que p é ponto interior de C, i.e. $p \in \text{int}(C)$.

(b) Mostre que se $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fronteiro de um conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^n$, então existe um hiperplano $H_=(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ que separa fracamente $\{p\}$ de C. Ou seja, $p \in H_=(a,b)$ e $C \subseteq H_\leq(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$.

Resolução:

(a) Se $\text{cone}(C - p) = \mathbb{R}^n$ então $\text{cone}(C - p)$ contém qualquer vector da base canónica e_i e seu simétrico $-e_i$. Sendo $C - p$ convexo (pois C é convexo) temos que $\text{cone}(C - p) = \{\lambda x : x \in C - p, \lambda \geq 0\}$. Portanto existem $\lambda_i > 0$ e $\mu_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ tais que $\lambda_i e_i$ e $-\mu_i e_i$ pertencem a $C - p$. Logo temos $\text{conv}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n, -\mu_1 e_1, \dots, -\mu_n e_n) \subseteq C - p$. Logo 0 é ponto interior de $C - p$ ($B_\varepsilon(0) \subseteq C - p$ onde $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n\}$) pelo que se conclui que p é ponto interior de C.

(b) Mostremos primeiro o seguinte lema:

Lema 0.1. *Se $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é um cone convexo tal que o seu fecho é todo o $\mathbb{R}^n$ então K é também todo o $\mathbb{R}^n$. Ou seja $\text{cl}(K) = \mathbb{R}^n \Rightarrow K = \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto arbitrário. Queremos ver que $x_0 \in K$ partindo do pressuposto que $\text{cl}(K) = \mathbb{R}^n$. Como K é um cone, temos que $0 \in K$, logo ficamos restringidos ao caso em que $x_0 \neq 0$. A menos de uma mudança de base[1], o que não altera o problema (K continua a ser um cone e $\text{cl}(K)$ continua a ser todo o $\mathbb{R}^n$), podemos assumir

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

onde $e_1, \dots, e_n$ forma a base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Tomemos, para um $\varepsilon > 0$ arbitrário, o aberto $U_\varepsilon =]-\varepsilon, \varepsilon[^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$. Então, como $\text{cl}(K) = \mathbb{R}^n$, existem $y_1, \dots, y_n \in U_\varepsilon$ tais que $e_1 + y_1, \dots, e_n + y_n \in K$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno os vectores $e_1 + y_1, \dots, e_n + y_n$ são linearmente independentes, logo existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i + y_i)$$

se mostrarmos que os λ_i's são não-negativos provamos que x_0 é uma combinação cónica de elementos de K logo $x_0 \in K$.

Temos então que para cada $i = 1, \dots, n$ os λ_i's verificam a equação:

$$1 = \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{i,j}$$

---

[1]Podemos construir uma tal base recursivamente do seguinte modo. Seja $\tilde{x}^k \in \mathbb{R}^k$ o vector formado pelas primeiras k coordenadas de x_0 e $b_1^k, \dots, b_k^k$ uma base de $\mathbb{R}^k$ tal que

$$\tilde{x}^k = \sum_{i=1}^{k} b_i^k$$

então $b_1^{k+1} = (b_1^k; 0), \dots, b_k^{k+1} = (b_k^k; 0)$ e $b_{k+1}^{k+1} = (0; x_{k+1})$ (caso $x_{k+1} \neq 0$) ou $b_1^{k+1} = (b_1^k; 1), \dots, b_k^{k+1} = (b_k^k; 1)$ e $b_{k+1}^{k+1} = (0; -k)$ (caso $x_{k+1} = 0$) formam uma base de $\mathbb{R}^{k+1}$ tal que

$$\tilde{x}^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} b_i^{k+1}$$

Consideremos $\|\lambda\|_\infty = \max\{|\lambda_i| : i = 1, \ldots, n\}$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno ($\varepsilon < \frac{1}{n}$) não existe nenhum índice k tal que $\lambda_k = -\|\lambda\|_\infty$ pois caso contrário teriamos

$$-\|\lambda\|_\infty = \lambda_k = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{k,j} \geq 1 - n\varepsilon\|\lambda\|_\infty \geq 1 - \|\lambda\|_\infty$$

Assim temos que $\|\lambda\|_\infty = \lambda_k$ para algum k,

$$|\lambda\|_\infty = \lambda_k = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{k,j} \leq 1 + n\varepsilon\|\lambda\|_\infty$$

donde sai que $\|\lambda\|_\infty \leq \frac{1}{1-n\varepsilon}$. Logo para qualquer $i = 1, \ldots, n$ temos que

$$\lambda_i = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{i,j} \geq 1 - n\varepsilon\|\lambda\|_\infty \geq 1 - \frac{n\varepsilon}{1 - n\varepsilon} = \frac{1 - 2n\varepsilon}{1 - n\varepsilon}$$

Donde se conclui que para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2n}$ todos os λ_i's são estritamente positivos. $\square$

Resolveremos agora o exercício 3(b). Seja p um ponto fronteiro do conjunto convexo C. Como $p \notin \mathrm{int}(C)$, temos, pela alínea (a), que $\mathrm{cone}(C - p) \neq \mathbb{R}^n$. Logo, pelo lema acima demontrado, $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(C - p)) \neq \mathbb{R}^n$. Como $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(C - p))$ é um cone fechado e não-vazio ($0 \in \mathrm{cone}(C - p) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(C - p))$), temos pelo corolário 2.29 dos apontamentos das aulas teóricas (ou corolário 1.18 do texto do Geir Dahl) que para um $q \notin \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(C - p))$ (existe pois $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(C - p)) \neq \mathbb{R}^n$) existe um $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $a^T x \leq 0 < a^T q$ para todo o $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(C - p))$. Em particular $a^T x \leq 0$ para qualquer $x \in C - p$, logo $a^T c \leq a^T p$ para qualquer $c \in C$. Ou seja o hiperplano $H_=(a, b)$ com $b = a^T p$ separa propriamente o ponto p do conjunto C (i.e. $p \in H_=(a, b)$ e $C \subseteq H_\leq(a, b)$).