

7ª Ficha

Programação Matemática

1º Semestre de 2008/2009

Prazo de entrega: 14 de Novembro no final da aula teórica

1- [8 val.] Seja $T = (V, E)$ um grafo. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) T é uma árvore.
- (ii) T é conexo e cada aresta de T é uma ponte¹.
- (iii) Existe um único atalho entre cada par de vértices.
- (iv) T é conexo e $|E| = |V| - 1$.
- (v) T é uma floresta e $|E| = |V| - 1$.

2- [6 val.] No quadro que se segue estão dados os preços das ligações por barco entre várias ilhas de dado arquipélago (se na casa XY não aparece nenhum valor é porque não existe ligação directa entre as ilhas X e Y):

Ilha	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		5							
B	5		7		9				
C		7		6	5	4			
D			6			5		9	
E		9	5				6		
F			4	5			4		
G					6	4		8	
H				9			8		2
I								2	

Use o algoritmo de Dijkstra para determinar o percurso de menor custo entre as ilhas A e I.

3- [6 val.] Considere um grafo $G = (V, E)$ com a distância usual ($w(e) = 1$ para qualquer $e \in E$). Seja A a matriz de adjacência de G e $a_{i,j}^{(k)}$ a entrada de A^k (a k -ésima potência de A), $k \geq 0$. Mostre que

$$d(v_i, v_j) = \min\{k \geq 0 : a_{i,j}^{(k)} > 0\}$$

¹Uma aresta diz-se uma ponte se ao ser removida o número de componentes conexas do grafo aumenta.