2^a **Ficha**

Programação Matemática

1^o Semestre de 2008/2009

Prazo de entregua: 3 de Outubro no final da aula teórica

1- [5 val.] Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são polítopos:

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + 2y + 3z = 6\}$;

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq z \leq 1\}$.

2- [5 val.] Mostre que um conjunto fechado não-vazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se e só se for uma intersecção de uma família de semi-espaços fechados. Ou seja

$$S = \bigcap_{i \in I} H_{\leq}(a_i, b_i)$$

onde I é um conjunto de índices, $a_i \in \mathbb{R}^n$ são vectores não-nulos, $b_i \in \mathbb{R}$ e $H_{\leq}(a_i, b_i) := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i\}$.

3- [5 val.] Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos do seguinte modo:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 + 2\},\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{e} \quad C = \operatorname{conv}(\{(1, 1), (2, 2), (2, 0)\})$$

Determine uma recta que separe fortemente:

(a) A e B;

(b) B e C;

(c) A e C.

4- [5 val.] Mostre que se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo e compacto então existe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $C = \operatorname{conv}(X)$ e para qualquer outro conjunto $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $C = \operatorname{conv}(Y)$ temos $X \subseteq Y$.