

10^a Ficha

Programação Matemática

1^o Semestre de 2008/2009

Prazo de entrega: 12 de Dezembro no final da aula teórica

1- [6 val.] Seja $G = (V, E)$ um grafo. Mostre que a cardinalidade máxima de uma coclique de G é menor ou igual à cardinalidade mínima de uma cobertura de arestas de G e que a cardinalidade máxima de um matching de G é menor ou igual à cardinalidade mínima de uma cobertura de vértices de G . Ou seja

$$\alpha(G) \leq \rho(G) \quad \text{e} \quad \nu(G) \leq \tau(G)$$

2- [7 val.] Seja $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ uma família de subconjuntos de um dado conjunto finito X . Um subconjunto Y de X diz-se *transversal* se existir uma bijecção $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow Y$ tal que $\pi(i) \in A_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Mostre que \mathcal{A} possui um conjunto transversal se e só se

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|$$

para todo o subconjunto I de $\{1, \dots, n\}$.

3- [7 val.] Suponhamos que temos 6 objectos que queremos transportar. Para tal podemos recorrer a 7 vasilhas, cada uma das quais pode transportar um só objecto. Na tabela que se segue estão indicadas as dimensões dos objectos:

Objecto	comprimento	largura	altura	peso
O_1	30 cm	10 cm	10 cm	10 kg
O_2	20 cm	5 cm	3 cm	2 kg
O_3	20 cm	10 cm	10 cm	6 kg
O_4	10 cm	8 cm	2 cm	8 kg
O_5	40 cm	20 cm	15 cm	11 kg
O_6	15 cm	12 cm	11 cm	16 kg

e na tabela que se segue estão indicadas as capacidades das vasilhas:

Vasilha	comprimento	largura	altura	peso
V_1	50 cm	30 cm	30 cm	20 kg
V_2	40 cm	40 cm	40 cm	15 kg
V_3	20 cm	10 cm	5 cm	10 kg
V_4	10 cm	10 cm	10 cm	15 kg
V_5	10 cm	9 cm	7 cm	7 kg
V_6	15 cm	15 cm	9 cm	10 kg
V_7	14 cm	13 cm	12 cm	11 kg

Diga, justificando, qual o número máximo de objectos que podem ser transportados pelas vasilhas e apresente uma solução.