Resolução correcta do último problema da primeira aula práctica de Programação Matemática

Problema: Seja A um subconjunto da esfera unitária n-dimensional $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ e seja $conv(A)$ o seu invólucro convexo. Mostre que $conv(A) \cap \mathbb{S}^n = A$.

Resolução: É evidente que, uma vez que $A \subseteq conv(A)$ e $A \subseteq \mathbb{S}^n$, $A \subseteq conv(A) \cap \mathbb{S}^n$. Basta-nos provar que se $x \in conv(A) \setminus A$ então $x \notin \mathbb{S}^n$.

$x \in conv(A)$ se x for uma combinação convexa de elementos de A, ou seja

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \text{ com } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0 \text{ e } x_i \in A \quad \forall_{i=1,\ldots,m}$$

Assim sendo, temos que a norma de x ao quadrado é

$$||x||^2 = x^T x = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right)^T \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j x_i^T x_j \leq \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j |x_i^T x_j|$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $|x_i^T x_j| \leq ||x_i|| ||x_j|| = 1$, donde sai que

$$||x|| \leq \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^2 = 1$$

Para que esta desigualdade seja estrita basta que existam dois índices i e j tais que $\lambda_i \lambda_j x_i^T x_j < \lambda_i \lambda_j$. Tal acontece se $x_i^T x_j < 1$ e $\lambda_i \lambda_j > 0$. Assumindo que os x_i's são distintos entre si (e podemos sem perda de generalidade assumir tal), temos que $x_i^T x_j < 1$ para $i \neq j$ e $x_i, x_j \in \mathbb{S}^n$, logo $||x|| < 1$ se existirem dois índices distintos i e j tais que $\lambda_i > 0$ e $\lambda_j > 0$, que é condição necessária para x não pertencer a A.

Portanto, se $x \in conv(A) \setminus A$ (logo x é uma combinação convexa com dois coeficientes não nulos) então $||x|| < 1$, portanto $x \notin \mathbb{S}^n$.