Resolução do exame de 1ª época

Programação Matemática

1- O sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & \geq & 0 \\ x & - & y & & & \leq & 0 \\ x & + & y & + & z & \geq & 3 \\ x & + & y & + & \alpha z & \leq & \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} -x & - & y & & & \leq & 0 \\ x & - & y & & & \leq & 0 \\ -x & - & y & - & z & \leq & -3 \\ x & + & y & + & \alpha z & \leq & \beta \end{array}\right.$$

é do tipo $Ax \leq b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Por um corolário do lema de Farkas, um sistema do tipo $Ax \leq b$ é consistente se e só se $y^T b \geq 0$ para todo o y que satisfaça $y^T A = 0$ e $y \geq 0$. Ou seja, $Ax \leq b$ é inconsistente se e só se existe $y \geq 0$ tal que $y^T A = 0$ e $y^T b < 0$.

$y^T A = 0$ sse y pertence ao núcleo de A^T:

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1+\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Portanto $y^T A = 0$ sse

$$y = \begin{bmatrix} (1-\alpha)\lambda \\ 0 \\ \alpha\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}$$

Da condição $y^T b < 0$ resulta $-3y_3 + \beta y_4 = (-3\alpha + \beta)\lambda < 0$, logo $\lambda \neq 0$. Como $y_4 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$ temos $\lambda > 0$ e portanto, $y_1 = (1-\alpha)\lambda \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1$ e $y_3 = \alpha\lambda \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$.

Assim o sistema é inconsistente se e só se $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\beta < 3\alpha$.

2- [3 val.] O problema de programação linear:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar:} & 2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{Sujeito a:} & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\
\text{Com:} & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

é equivalente, juntando variáveis de folga x_4 e x_5, ao problema de programação linear:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar:} & 2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{Sujeito a:} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\
\text{Com:} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Iniciando com $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (i.e. as variáveis básicas são as variáveis de folga), temos o tableau $\begin{array}{|c|c|}\hline A & b \\ \hline c^T & 0 \\ \hline\end{array}$ fica da forma:

$$
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Neste caso já temos $\overline{c} = c$ e $A_B = I$ (i.e. as colunas de A correspondentes às variáveis básicas formam a matriz identidade e as correspondentes coordenadas de $\overline{c}$ são zero) portanto não é necessário proceder ao passo 0 do algoritmo simplex:

$$
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
(1) & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
2_{>0} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & (2) & -1 & 1 & 4 \\
\hline
0 & -1 & 1_{>0} & -2 & 0 & -2 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\
0 & \frac{31}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\
\hline
0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -4 \\
\hline
\end{array}
$$

O termina no último tableau pois $\overline{c}^T = (0, -\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \leq 0$. Portanto a solução básica obtida é $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 0, 2, 0, 0)$. Ou seja, no problema original, uma solução optimal é $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$ com valor optimal 4.

3- Dada a matriz com entradas reais,

$$
M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

temos que o conjunto X das suas colunas mais a família $\mathcal{I}$ dos subconjuntos de X linearmente independentes formam um matróide (mais concretamente um matróide linear). Como a característica da matriz M é 3 (pois só tem três linhas e são linearmente indepentes) há uma correspondência biunívoca entre as bases do matróide e as submatrizes 3×3 de M invertíveis.

Assim, determinar uma submatriz N de M invertível de dimensão 3 é equivalente a determinar uma base do matróide $(X, \mathcal{I})$ que maximize o peso $w : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $w \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + b + c$.

Como $(X, \mathcal{I})$ é um matróide podemos usar o algoritmo ganancioso[1]:

$$w \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \geq w \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \geq w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iniciamos com $F := \emptyset$

$F \cup \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 2 \end{array} \right\} \in \mathcal{I} \Rightarrow F := \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 2 \end{array} \right\}$;

$F \cup \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \notin \mathcal{I}$;

$F \cup \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\} \in \mathcal{I} \Rightarrow F := \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$;

$F \cup \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right\} \notin \mathcal{I}$;

$F \cup \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} \notin \mathcal{I}$;

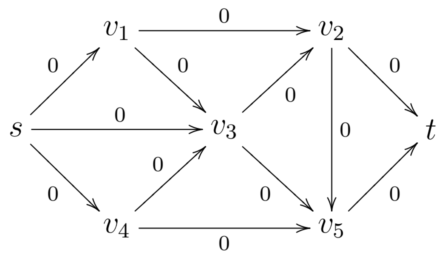
$F \cup \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \in \mathcal{I} \Rightarrow F := \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Logo uma submatriz invertível de peso máximo é

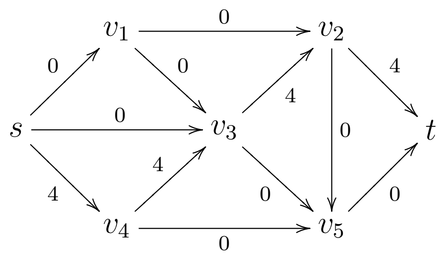
$$N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

[1]Embora a função peso w não seja sempre positiva, como queremos uma base (e não apenas um conjunto independente) de peso máximo, podemos usar à mesma o algoritmo ganancioso.

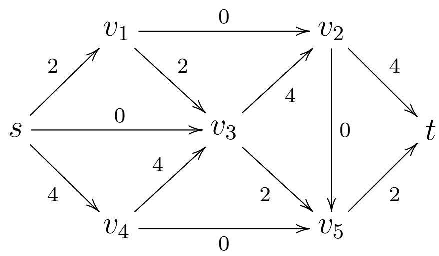
4- Iniciamos com o fluxo nulo:



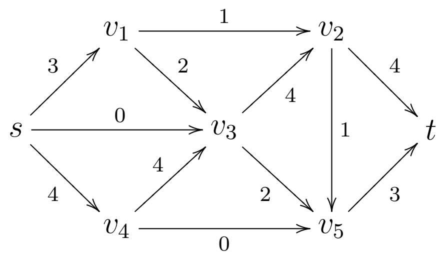
Determinamos o $S(x)$, que neste caso é formados por todos os vértices incluindo t. Logo existe um caminho x-aumentador, por exemplo s, v_4, v_3, v_2, t, com $\varepsilon = \min\{5, 4, 4, 6\} = 4$, ficamos então com o novo fluxo:



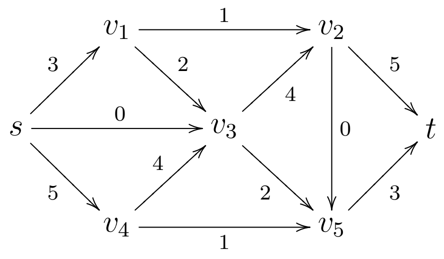
$S(x) = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$, tomamos novamente um caminho x-aumentador, por exemplo s, v_1, v_3, v_5, t, com $\varepsilon = \min\{4, 2, 2, 3\} = 2$, ficamos então com o novo fluxo:



$S(x) = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$, tomamos novamente um caminho x-aumentador, por exemplo s, v_1, v_2, v_5, t, com $\varepsilon = \min\{4-1, 1, 1, 3-2\} = 1$, ficamos então com o novo fluxo:

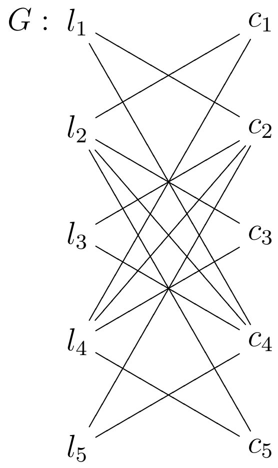


$S(x) = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$, tomamos novamente um caminho x-aumentador, por exemplo s, v_4, v_5, v_2, t, com $\varepsilon = \min\{5-4, 4, 1, 6-4\} = 1$, ficamos então com o novo fluxo:



$S(x) = \{s, v_1, v_3, v_4, v_5\} \not\ni t$, logo este fluxo-$st$ é máximo, com valor $f(x) = 3 + 5 = 8$, e $C = \delta^+(S(x)) = \{(v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_5, t)\}$ é corte-st de capacidade $d(C)$ mínima pois $d(C) = 1 + 4 + 3 = f(x)$.

5- Consideremos o grafo bipartido $G = (L \cup C, E)$ onde L é o conjunto das linhas do quadro, C é o conjunto das colunas do quadro e uma aresta liga uma linha l_i a uma coluna c_j se a casa correspondente for branca.

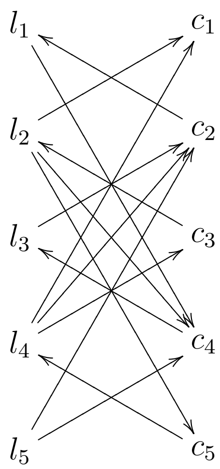


Neste caso, preencher as casas brancas com letras de modo a não repetiremse na mesma linha ou coluna é equivalente a colorir as arestas de G (i.e. decompor E em matchings).

(a) Assim, o problema proposto equivale a encontrar o número de matching de G (i.e. o tamanho máximo para um matching de G). Para tal, basta tomar um candidato a matching de tamanho máximo M e verificar se existem caminhos de aumento de matching, se não existem então M é de tamanho máximo, se existem podemos usar um desses caminhos para aumentar o matching e repetir o processo até deixar de exitir tais caminhos.

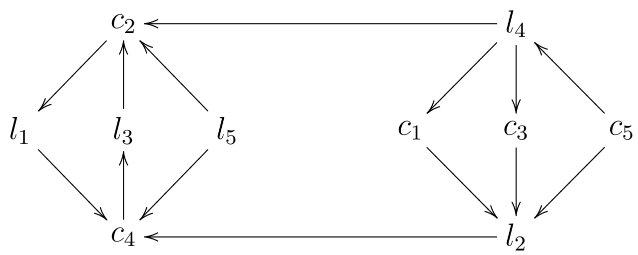
Um candidato possível é o matching $M = \{[l_1, c_2], [l_2, c_3], [l_3, c_4], [l_4, c_5]\}$ que corresponde à maior diagonal em branco do quadro. Temos então que um caminho M-aumentador corresponde a um caminho dirigido entre l_5 e c_1 no digrafo associado ao matching:

$D(G):$



Tal caminho não existe pois teria de passar por um dos arcos (l_2, c_4) ou (l_4, c_2) no sentido inverso, tal é mais visível na seguinte representação planar do digrafo $D(G)$:

$D(G):$



POrtanto o matching M é de tamanho máximo, logo 4 é o número máximo de vezes que uma letra pode ser repetido no quadro.

(b) Determinar o número mínimo de letras necessárias para preencher o quadro equivale a determinar o índice cromático de G, $\chi'(G)$. Sendo G um grafo bipartido, o índice cromático é, pelo teorema de Kőnig, igual ao grau máximo em G, $\Delta(G)$, ou seja 4.

6- (Demonstração por contra-recíproco) Suponhamos que $A \neq B$, então existe $A \setminus B \neq \emptyset$ ou existe $B \setminus A \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $B \setminus A \neq \emptyset$ e seja $x_0 \in B \setminus A$. Como A é convexo, fechado e não-vazio (se fosse vazio teríamos $p_v(A) = \emptyset \neq p_v(B)$ para todo o v) existe um hiperplano que separa fortemente A de x_0. Ou seja, existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $v^T x \leq b$ para todo o $x \in A$ e $v^T x_0 > b$. Tomando um vector unitário u ortogonal a v temos que:

$$\forall_{x \in A} v^T p_u(x) = v^T(x - \langle u, x \rangle u) = v^T x \leq b \text{ e } v^T p_u(x_0) = v^T x_0 > b$$

Logo $p_u(A) \neq p_u(B)$.

7- [2 val.] Podemos extrair os graus dos vértices de G através da sua matriz de adjacência:

$$\begin{bmatrix} d(v_1) \\ d(v_2) \\ d(v_3) \\ d(v_4) \\ d(v_5) \\ d(v_6) \\ d(v_7) \\ d(v_8) \\ d(v_9) \\ d(v_{10}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto temos que $\Delta(G) = 4$. Como G não possui nenhuma componente conexa isomorfa a K_5 (pois não existem cinco vértices de grau 4), temos pelo teorema de Brooks , que $\chi(G) \leq \Delta(G) = 4$.

Por outro lado, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é submatriz de A (associada aos vértices v_1, v_2, v_3 e v_6), ou seja K_4 é subgrafo de G. Logo $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 4$.

Concluimos portanto que $\chi(G) = 4$.