6^a **Ficha**

Programação Matemática

1^o Semestre de 2010/2011

Data de entrega: 15 de Dezembro

1- [8 val.] Sejam $a_{1,1},\ldots,a_{6,6}$ trinta e seis números reais algebricamente independentes (i.e. $p(a_{1,1},\ldots,a_{6,6}) \neq 0$ para qualquer polinómio não-nulo p com coeficientes inteiros). Pretende-se determinar o grau do seguinte polinómio:

$$p(x) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1}x^2 & a_{1,2}x^2 & a_{1,3}x^4 & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6}x^5 \\ a_{2,1} & a_{2,2}x & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5}x & a_{2,6} \\ a_{3,1}x & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4}x & a_{3,5}x & a_{3,6}x^4 \\ a_{4,1} & a_{4,2}x & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5}x^3 & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2}x^2 & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5}x^4 & a_{6,6} \end{bmatrix}\right)$$

(a) Formalize o problema como um problema de matching de peso máximo.

(b) Resolva o problema usando o algoritmo de aumento de matching.

2- [6 val.] Dados dois grafos G e H define-se o seu produto cartesiano $G \times H$ como sendo o grafo cujos vértices são pares ordenados de vértices de G e H (i.e. $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$) e dois vértices de $G \times H$, (u, u') e (v, v') são adjacentes se e só se $u = v$ e $[u', v'] \in E(H)$ (i.e u' e v' são adjacentes em H) ou $u' = v'$ e $[u, v] \in E(G)$ (i.e u e v são adjacentes em G). Mostre que o número cromático de um produto cartesiano de dois grafos é igual ao maior número cromático deles. Ou seja,

$$\chi(G \times H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$$

3- [6 val.] Seja $G = (V, E)$ um grafo e V_1 e V_2 dois conjuntos de vértices tais que $V = V_1 \cup V_2$, o subgrafo induzido por $V_1 \cap V_2$ é completo e não existem arestas a ligar vértices de $V_1 \setminus V_2$ a vértices de $V_2 \setminus V_1$. Sejam G_1, G_2 e G_3 os subgrafos induzidos por V_1, V_2 e $V_1 \cap V_2$ respectivamente. Mostre que os polinómios cromáticos de G, G_1, G_2 e G_3 satisfazem a seguinte equação:

$$P_G(t)P_{G_3}(t) = P_{G_1}(t)P_{G_2}(t)$$