Exame de 2ª época

Programação Matemática

1^o Semestre de 2008/2009

4 de Fevereiro de 2009

Duração: 3 horas

1- [3 val.] Determine os invólucros afim, aff(S), convexo, conv(S), e cónico, cone(S), para o seguinte conjunto:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \wedge 2z + x = 2\}$$

2- [3 val.] Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x - y + 2z \leq 10 \\ x - 2y \geq -1 \\ 2x - 4y - z \geq -2 \\ 4x - 8y - \alpha z \leq \beta \end{cases}$$

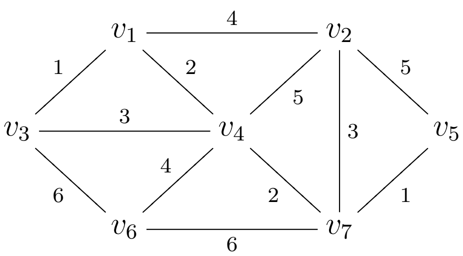
Determine os valores de α e β para os quais o sistema é consistente.

3- [4 val.] Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar:} & x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a:} & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ \text{Com:} & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Resolva o problema, usando o método do Simplex, iniciando com $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$.

4- [3 val.] Considere o seguinte grafo



com os pesos das arestas representados sobre estas. Use o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore geradora de peso mínimo. Represente a árvore obtida graficamente.

5- [4 val.] Uma dada unidade de tratamento de águas residuais funciona do seguinte modo. Dois tanques A e B recebem até um máximo de 7 mil e 6 mil litros de água por dia, respectivamente, para um primeiro tratamento. Depois a água é transferida para outros três tanques C, D e E para um segundo tratamento. O tanque A pode transvasar até 6 mil litros por dia para o tanque C e até mil litros por dia para o tanque D, o tanque B pode transvasar até 2 mil litros por dia para o tanque D e até 4 mil litros por dia para o tanque E. Segue um novo transvaso para dois outros tanques F e G para um tratamento final. O tanque C pode transvasar até 5 mil litros por dia para o tanque F, o tanque D pode transvasar até 2 mil litros por dia para o tanque F e até 3 mil litros por dia para o tanque G e o tanque E pode transvasar até 3 mil litros por dia para o tanque G. Finalmente, depois deste último tratamento a água tratada é escoada para o rio a um fluxo máximo de 2 mil litros por dia do tanque F e 7 mil litros por dia do tanque G.

Pretende-se determinar a quantidade máxima de água que a unidade pode tratar.

(a) Formalize o problema como problema de fluxo-*st* com valor máximo.

(b) Resolva o problema e determine também um corte-*st* de capacidade mínima.

6- [3 val.] Mostre que o número de coloração de arestas de um grafo completo de 2^n vértices é $2^n - 1$. Ou seja,

$$\chi(K_{2^n}) = 2^n - 1$$