Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE – 1º SEM. 2006/07

3ª FICHA DE EXERCÍCIOS

I. Continuidade de Funções.

1) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{x}} & , \ x > 0 \\ \\ x(2-x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

2) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

3) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & , \ x > 0 \\ \\ (x+k)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2 + \frac{k}{x}\right) & , \ x > 1 \\ 1 - x^2 & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto 1.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} & , \ x > 0 \\ k(x+1)^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

6) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2(1+x)}\right) & , \ x > 0 \\ (x+1)^2 - k & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & , \ x > 0 \\ 1 - x^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

8) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

9) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} & , \ x > 1 \\ \\ (k-x)(1+x) & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto um.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

10) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

11) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3\cos\left(\dfrac{\pi}{1+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(x+1) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.
(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

12) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{k}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ -x(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.
(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.
(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

13) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x > 0 \\ (k-x)(x+1) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.
(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.
(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

14) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{2}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.
(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.
(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

15) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2+x}\right) & , \ x > 0 \\ (x-1)^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

16) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \\ g(x) &= x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(c) Mostre que são funções limitadas.

17) Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\log(1+x) \\ g(x) &= \sqrt{x} \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} \ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(c) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

II. Axioma de Supremo

1) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Mostre que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > s - \epsilon$.

2) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Seja ainda $m \in \mathbb{R}$ um majorante de A distinto de s. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $a < m - \epsilon$ para todo o $a \in A$.

3) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) Prove que se $\sup A < \inf B$ então A e B são disjuntos.

(b) Mostre por meio de exemplos que se $\sup A \geq \inf B$ então A e B podem ser ou não disjuntos.

4) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Considere o subconjunto $C \subset \mathbb{R}$ definido por

$$C = A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \ x = a + b \text{ com } a \in A\,, \ b \in B\}\,.$$

Mostre que:

(a) Se A e B têm supremo, então C também tem supremo e $\sup C = \sup A + \sup B$.

(b) Se A e B têm ínfimo, então C também tem ínfimo e $\inf C = \inf A + \inf B$.

5) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que

$$a \leq b\,,\ \text{ para quaisquer } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Mostre que existem o supremo de A e o ínfimo de B, e que $\sup A \leq \inf B$.

6) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que

$$\inf A < \sup B\,.$$

Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ com $a < b$.

7) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e limitados, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < 1$.

8) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e limitados, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < \varepsilon$.

9) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos não-vazios e limitados, tais que $\inf B - \sup A = 1$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $1 \leq b - a < 2$.

10) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos não-vazios e limitados, tais que $\sup A - \inf B = 1$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $0 < a - b \leq 1$.

11) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, limitado e não-vazio, tal que $\sup A - \inf A = 2$. Mostre que existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $1 < a_2 - a_1 \leq 2$.

12) Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, tal que $|a_1 - a_2| < 1$ para quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Mostre que A tem supremo.

13) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e majorados, tais que $\sup A \leq \sup B$. Mostre que o conjunto $C = A \cup B$ tem supremo e que $\sup C = \sup B$.

14) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que B é majorado e $A \subset B$. Mostre que A e B têm supremo e que $\sup A \leq \sup B$.

15) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, não-vazio e majorado, tal que $\sup A = 1$. Mostre que $A \cap [0, 1] \neq \emptyset$.

III. Propriedades Globais das Funções Contínuas

1) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0, 1]$, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0, 1]$. Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [0, 1]$ com $f(c) = c$. [Sugestão: aplique o teorema de Bolzano a $g(x) = f(x) - x$.]

2) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), tal que $f(a) \leq a$ e $f(b) \geq b$. Prove que f tem um ponto fixo em $[a, b]$.

3) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(-1) = 0 = f(1)\,.$$

Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [-1, 1]$ com $f(c) = c$.

4) Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty\,.$$
Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in]-1,1[$ com $f(c) = c$.

5) Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(b) < f(x)$ para todo o $x > b$. Mostre que f tem mínimo em $[0,+\infty[$.

6) Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(0) > f(x)$ para todo o $x > b$. Prove que f tem máximo em $[0,+\infty[$.

7) Dada uma função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, considere a função f que é definida em $[-1,1]$ por $f(x) = g(1-x^2)$.

(a) Supondo que g é contínua em todo o seu domínio, mostre que f tem máximo e mínimo.

(b) Supondo apenas que g é contínua em $]0,+\infty[$, poderemos garantir a existência de máximo e mínimo de f? Justifique.

8) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

(a) Prove que f é limitada.

(b) Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.

(c) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique, justificando, o máximo da função
$$g(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}\,.$$

9) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:

(a) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais.

(b) f tem mínimo em $\mathbb{R}$.

10) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \beta\,,$$
com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]\alpha,\beta[$.

11) Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to 1^-} f(x)\,.$$
Prove que f tem máximo no intervalo $]-1,1[$.

12) Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to 1^-} f(x)\,.$$
Prove que f tem mínimo no intervalo $]-1,1[$.

13) Sejam f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, e considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$. Prove que se A e B são não-vazios, então C também é não-vazio.

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva (i.e. $f(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$), tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)\,.$$

Prove que f tem máximo.

15) Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

Prove que f tem máximo no intervalo $[0, +\infty[$.

IV. Cálculo de Derivadas de Funções.

1) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ (b) $f(x) = x^4 + \operatorname{sen}(x)$ (c) $f(x) = x^4 \operatorname{sen}(x)$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos(x)}$

(g) $f(x) = \dfrac{x+\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$ (h) $f(x) = \dfrac{x\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}$ (i) $f(x) = \operatorname{senh}(x)\cosh(x)$

2) (a) A área de uma círculo de raio r é πr^2 e o seu perímetro é $2\pi r$. Mostre que a taxa de variação da área em relação ao raio é igual ao perímetro.

(b) O volume de uma esfera de raio r é $4\pi r^3/3$ e a área da sua superfície é $4\pi r^2$. Mostre que a taxa de variação do volume em relação ao raio é igual à área da superfície.

3) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (c) $f(x) = x^{3/2}$

(d) $f(x) = x^{-3/2}$ (e) $f(x) = x^{1/3} + x^{-1/4}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

4) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \tan(x) - x$ (b) $f(x) = x\tan(x)$ (c) $f(x) = \cot(x) + x$

(d) $f(x) = \dfrac{\cot(x)}{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\cot(x)}$ (f) $f(x) = \tan^2(x)$

5) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = x|x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = e^{-|x|}\,.$$

Para cada uma destas funções,

(a) mostre que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcule a derivada;

(b) estude a diferenciabilidade no ponto 0.

6) Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \ . \end{cases}$$

7) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \cos(2x) - 2\,\mathrm{sen}(x)$ (b) $f(x) = \mathrm{sen}(e^x)$ (c) $f(x) = \tan(x/2) - \cot(x/2)$

(d) $f(x) = \mathrm{sen}(\cos^2(x))\cos(\mathrm{sen}^2(x))$ (e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}^2(x)}{\mathrm{sen}(x^2)}$ (f) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(g) $f(x) = (2-x^2)\cos(x^2) + 2x\,\mathrm{sen}(x^3)$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (i) $f(x) = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$

(j) $f(x) = \cos^2(\sqrt{x}) + \mathrm{sen}^2(1/x)$ (k) $f(x) = x(\mathrm{sen}(\sqrt{x}) + \cos(1/x))$

8) Determine a derivada g' em termos de f' se:

(a) $g(x) = f(x^2)$ (c) $g(x) = f[f(x)]$

(b) $g(x) = f(\mathrm{sen}^2(x)) + f(\cos^2(x))$ (d) $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$

9) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

10) Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\phi'(1)$ e $\phi''(e)$.

11) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \log(1+x^2)$ (b) $f(x) = x^2(1+\log x)$ (c) $f(x) = \log(\log x)$

(d) $f(x) = \log(1+\sqrt{x})$ (e) $f(x) = \log(1+\mathrm{sen}^2 x)$ (f) $f(x) = \log(1+\cos^2 x)$

(g) $f(x) = e^{\log x}$ (h) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ (i) $f(x) = e^{1/x}$ (j) $f(x) = e^{1/\sqrt{x}}$

(k) $f(x) = e^{\mathrm{sen}^2 x}$ (l) $f(x) = e^{\cos^2 x}$ (m) $f(x) = x^2 e^x$ (n) $f(x) = xe^{x^2}$

(o) $f(x) = 2^{\log x}$ (p) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ (q) $f(x) = 2^{1/x}$ (r) $f(x) = 2^{1/\sqrt{x}}$

(s) $f(x) = 2^{\mathrm{sen}^2 x}$ (t) $f(x) = 2^{\cos^2 x}$ (u) $f(x) = x^2 2^x$ (v) $f(x) = x2^{x^2}$

(w) $f(x) = x^x$ (x) $f(x) = x^{\log x}$ (y) $f(x) = (\log x)^x$ (z) $f(x) = x^{1/x}$