

Resolução do exame

Cálculo Diferencial e Integral I

Versão A

Data: 8/ 2/ 2008

Grupo I

1- (a)

$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{x(x^2 - x - 2)}{x - 1} = \frac{x(x - 2)(x + 1)}{x - 1}$$

Cálculo auxiliar: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = 2 \text{ ou } -1$

		-1		0		1		2	
x	-		-	0	+		+		+
$x - 2$	-		-		-		-	0	+
$x + 1$	-	0	+		+		+		+
$x - 1$	-		-		-	0	+		+
$\frac{x(x-2)(x+1)}{x-1}$	+	0	-	0	+	ss	-	0	+

Portanto

$$\frac{x(x - 2)(x + 1)}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow x \in] - 1, 0[\cup] 1, 2[$$

(b) $A \cup B =] - 1, 0[\cup] 1, 2[\cup \{3\}$

O conjunto dos majorantes de $A \cup B$ é $[3, +\infty[$, o conjunto dos minorantes de $A \cup B$ é $] - \infty, -1]$, o supremo de $A \cup B$ é 3, o ínfimo de $A \cup B$ é -1, o máximo de $A \cup B$ é 3 e o mínimo de $A \cup B$ não existe (pois o ínfimo não pertence a $A \cup B$).

2- f é contínua em $x = 0$ sse

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Deste modo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} + \alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log \left[(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \right]} + \alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}} + \alpha = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^2}} + \alpha$$

Fazendo uso da regra de Cauchy ($\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$) temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin x}{x} \frac{1}{2 \cos x} = -\frac{1}{2}$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-1/2} + \alpha = f(0) = 2$$

donde tiramos $\alpha = 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\beta x} - e^{-x}}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\beta x} - e^{-x}}{x}$ dá uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e como tanto o numerador como o denominador são funções diferenciáveis podemos usar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\beta x} - e^{-x}}{x} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\beta e^{\beta x} + e^{-x}}{1} = \beta + 1 = f(0) = 2$$

donde tiramos $\beta = 1$.

3-

$$(a) (\log(x + \sinh x))' = \frac{(x + \sinh x)'}{x + \sinh x} = \frac{1 + \cosh x}{x + \sinh x}$$

$$(b) (e^{\cos x} x)' = (e^{\cos x})' x + e^{\cos x} (x)' = -\sin(x) e^{\cos x} x + e^{\cos x}$$

4- (a) g é uma função racional, i.e. uma divisão de dois polinómios que são funções contínuas e diferenciáveis, logo g é uma função contínua e diferenciável em todo o seu domínio D_g .

O seu domínio consiste nos pontos de \mathbb{R} onde o denominador não se anula. Ou seja:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

pois $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

(b)

$$g'(x) = \frac{(-x + 2)'(x^2 + 2x + 1) - (-x + 2)(x^2 + 2x + 1)'}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-(x^2 + 2x + 1) + (x - 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x - 5}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 5)}{(x + 1)^4} = \frac{x - 5}{(x + 1)^3}$$

x		-1		5	
g'	+	ss	-	0	+
g	\nearrow	ss	\searrow	$g(5)$	\nearrow

Portanto temos que g tem um mínimo local em $x = 5$ com valor $g(5) = -\frac{1}{12}$.

Os intervalos de monotonia são:

$] -\infty, -1[$ onde g é crescente,

$] -1, 5[$ onde g é decrescente, e

$]5, +\infty[$ onde g é crescente.

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x + 2}{(x + 1)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

(d) Como o único mínimo local de g é menor ou igual que os limites de g quando x tende para $+\infty$, $-\infty$ ou -1 , temos que $g(5) = -\frac{1}{12}$ é mínimo absoluto de g . Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$. Logo, sendo g uma função contínua em todo o $] -1, 5]$, g toma todos os valores de $-\frac{1}{12}$ a $+\infty$. Portanto o contradomínio de g é o conjunto $[-\frac{1}{12}, +\infty[$.

(e) Excluído da resolução por motivos técnicos

5-

(a) Para $n = 1$

$$\varphi(1) = -1 = 1 + (-2)^1 \text{ é verdade}$$

Hipótese de indução:

$$\varphi(n) = 1 + (-2)^n$$

Tese de indução:

$$\varphi(n) = 1 + (-2)^{n+1}$$

Dem.

$$\begin{aligned}\varphi(n+1) &= 3 - 2\varphi(n) \\ &= 3 - 2(1 + (-2)^n) \quad \text{por hipótese de indução} \\ &= 3 - 2 + (-2)(-2)^n \\ &= 1 + (-2)^{n+1}\end{aligned}$$

(b) Sendo φ uma função diferenciável em \mathbb{R} temos, pelo teorema de Lagrange, que

$$\exists_{a \in]1,2[} : \varphi'(a) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2 - 1} = 1 + (-2)^2 - (-1) = 6$$

e

$$\exists_{b \in]2,3[} : \varphi'(b) = \frac{\varphi(3) - \varphi(2)}{3 - 2} = 1 + (-2)^3 - (1 + (-2)^2) = -12$$

Como φ' é uma função contínua (pois φ é uma função de classe C^1), temos, pelo teorema do valor intermédio, que φ' toma no intervalo $[a, b]$ todos os valores reais entre -12 e 6 . Em particular existe $\alpha \in]a, b[$ tal que $\varphi'(\alpha) = 4$.

(c) Seja ψ uma função tal que $\psi(\frac{1}{n}) = \varphi(n)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Se ψ fosse contínua em $[0, 1]$ então existiria, pelo teorema de Weierstrass, um valor M tal que $\psi(x) \leq M$ para todo o $x \in [0, 1]$, em particular $\psi(\frac{1}{2n}) = \varphi(2n) = 1 + (-2)^{2n} = 1 + 4^n \leq M$ para todo o número natural n o que seria absurdo.

Grupo II

1-

$$(a) \int \cos x - \tan x dx = \int \cos x dx + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \sin x + \log(|\cos x|)$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 2x - 12}{x^3 + 4x} &= \frac{x^2 - 2x - 12}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} = \\ &= \frac{A(x^2 + 4) + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 4)} = \frac{(A + B)x^2 + Cx + 4A}{x^3 + 4x}\end{aligned}$$

de onde se tira o sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ C &= -2 \\ 4A &= -12 \end{cases}$$

cujas soluções são $A = -3$, $B = 4$ e $C = -2$.

Assim temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x - 12}{x^3 + 4x} dx &= \int -\frac{3}{x} + \frac{4x}{x^2 + 4} - \frac{2}{x^2 + 4} dx = \\ &= -3 \log(|x|) + 2 \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = -3 \log(|x|) + 2 \log(x^2 + 4) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

(c) Primitivando por partes: $\int u'v = uv - \int uv'$ com $u' = 1$ e $v = \arcsen x$. Portanto temos $u = x$ e $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Aplicando a fórmula da primitivação por partes obtemos:

$$\begin{aligned}\int \arcsen(x) dx &= x \arcsen x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsen x + \frac{1}{2} \int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= x \arcsen x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \\ &= x \arcsen x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

(d) Considerando a mudança de variável $x = \log t$ (e portanto $dx = \frac{1}{t} dt$), temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{1+e^x} dx &= \int \frac{2}{1+e^{\log t}} \frac{1}{t} dt \\ &= \int \frac{2}{(1+t)t} dt \\ &= \int \frac{2+2t-2t}{(1+t)t} dt \\ &= \int \frac{2(1+t)}{(1+t)t} - \frac{2t}{(1+t)t} dt \\ &= \int \frac{2}{t} - \frac{2}{1+t} dt \\ &= 2 \log(t) - 2 \log(1+t) \\ &= 2x - 2 \log(1+e^x)\end{aligned}$$

2- Para $x > 0$ temos que

$$xe^{x^2} \leq xe^x \Leftrightarrow e^{x^2} \leq e^x \Leftrightarrow x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Portanto o conjunto S está compreendido entre as curvas de equação cartesiana $y = xe^x$ (acima) e $y = xe^{x^2}$ (abaixo) para valores de x entre 0 e 1.

Deste modo a sua área será dada pelo valor do integral definido

$$\int_0^1 (xe^x - xe^{x^2}) dx \stackrel{C.A.}{=} \left[xe^x - e - \frac{1}{2}e^{x^2} \right]_{x=0}^{x=1} = e - e - \frac{e}{2} - \left(0 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{e}{2}$$

C.A.:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

Nota- Por motivos técnicos esta resolução não inclui um esboço de S .

3-

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{3x^2 + x}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} = \\ &= \frac{A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{Ax^2 - A + Bx - B + Cx^2 + 2Cx + C}{(x+1)^2(x-1)} \end{aligned}$$

de onde se tira o sistema de equações:

$$\begin{cases} A + C &= 3 \\ B + 2C &= 1 \\ -A - B + C &= 0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 2$, $B = -1$ e $C = 1$.

Portanto

$$F'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

Assim, sendo F uma primitiva de F' , temos

$$F(x) = 2 \log(x+1) + \frac{1}{x+1} + \log(x-1) + C$$

sendo C uma constante tal que F satisfaça a condição $F(2) = 0$. Ou seja,

$$2 \log(3) + \frac{1}{3} + \log(1) + C = 0 \Leftrightarrow C = -2 \log(3) - \frac{1}{3}$$

Resultado final

$$F(x) = 2 \log(x+1) + \frac{1}{x+1} + \log(x-1) - 2 \log(3) - \frac{1}{3}$$

4-

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) e^{\cos x} = [-e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -e^{\cos \frac{\pi}{2}} + e^{\cos 0} = -1 + e$$

5- O polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 1$ da função $f(x) = x^3 + x$ é dado pela expressão:

$$p_{2,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$f(x) = x^3 + x \Rightarrow f(1) = 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 4$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6$$

Portanto o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 1$ da função $f(x) = x^3 + x$ é

$$p_{2,1}(x) = 2 + 4(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 = 3x^2 - 2x + 1$$

6- (a) Sendo ψ uma função contínua e positiva em \mathbb{R} (de acordo com o enunciado) temos que $\frac{e^t \sqrt{1+e^t}}{\psi(t)}$ é também uma função contínua em \mathbb{R} . Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral indefinido $\int_0^x \frac{e^t \sqrt{1+e^t}}{\psi(t)} dt$ é uma função diferenciável em \mathbb{R} . Logo

$$\psi(x) = e^{\int_0^x \frac{e^t \sqrt{1+e^t}}{\psi(t)} dt}$$

é uma função diferenciável em \mathbb{R} .

(b) Derivando ambos os termos da igualdade

$$\log(\psi(x)) = \int_0^x \frac{e^t \sqrt{1+e^t}}{\psi(t)} dt$$

(usando o Teorema Fundamental do Cálculo no segundo termo) obtemos a seguinte igualdade

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{e^x \sqrt{1+e^x}}{\psi(x)}$$

donde, tendo em conta que ψ é positiva (logo não se anula), tiramos

$$\psi'(x) = e^x \sqrt{1+e^x}$$

Portanto, $\psi(x)$ é uma primitiva de $e^x \sqrt{1+e^x}$, logo

$$\psi(x) = \frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + c$$

sendo c uma constante.

Além disso ψ satisfaz a igualdade

$$\log(\psi(x)) = \int_0^x \frac{e^t \sqrt{1+e^t}}{\psi(t)} dt$$

donde resulta, com $x = 0$, que

$$\log(\psi(0)) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Resumindo, a função ψ é dada por

$$\psi(x) = \frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + 1 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$