

2º-Teste (com resolução)
 Cálculo Diferencial e Integral I
 Cursos LEE, LEGI, LEIC e LERC 2º Semestre de 2010/2011
 Duração: hora e meia

Versão B

1- Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f .

(b) Determine, se existirem, os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\log(x)}$$

Resposta à questão 1:

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)'(x^2+3) - (x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3 - (x-1)(2x)}{(x^2+3)^2} = \\ &= \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2} = -\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x-3)(x+1)}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

$$Cal. Aux. : \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

x		-1		3	
f'	-	0	+	0	-
f	\searrow	$f(-1)$	\nearrow	$f(3)$	\searrow

Portanto temos que f tem um mínimo local em $x = -1$ com valor $f(-1) = -\frac{1}{2}$ e um máximo local em $x = 3$ com valor $f(3) = \frac{1}{6}$.

Os intervalos de monotonia são:

$] -\infty, -1[$ onde f é decrescente,

$] -1, 3[$ onde f é crescente, e

$] 3, +\infty[$ onde f é decrescente.

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}{\cancel{x}^2(1 + \frac{3}{x^2})} = \frac{0+0}{1+0} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\log(x)} &\left(= \frac{0}{0} \right) \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = f'(1) = -\frac{(1-3)(1+1)}{(1^2+3)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2- Determine, no seu domínio, uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $e^x + (3 + \operatorname{sen} x)^2 \cos x$;

(b) $\frac{\log(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(c) $\frac{x^3+x^2-x-2}{x^2+x}$;

(d) $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ (faça $\sqrt{x-1} = y$).

Resposta à questão 2:

(a) $\int e^x + (3 + \operatorname{sen} x)^2 \cos x \, dx = \int e^x \, dx + \int (3 + \operatorname{sen} x)^2 \cos x \, dx = e^x + \frac{(3+\operatorname{sen} x)^3}{3}$.

(b) Primitivando por partes: $\int u'v = uv - \int uv'$ com $u' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $v = \log(\sqrt{x})$. Portanto temos $u = 2\sqrt{x}$ e $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$. Aplicando a fórmula da primitivação por partes obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx &= 2\sqrt{x} \log(\sqrt{x}) - \int \frac{2\sqrt{x}}{2x} \, dx \\ &= 2\sqrt{x} \log(\sqrt{x}) - \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \\ &= 2\sqrt{x} \log(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

(c)

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 2}{x^2 + x} = x + \frac{-x - 2}{x(x+1)}$$

$\frac{-x-2}{x(x+1)}$ decompõe-se em fracções simples da seguinte forma:

$$\frac{-x - 2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)}$$

onde A e B são as únicas constantes que verificam a igualdade. Estas podem ser determinadas atribuindo à equação $-x - 2 = A(x+1) + Bx$ os valores de $x = 0$ (donde sai $A = -2$) e $x = -1$ (donde sai $B = 1$).

Assim, temos que

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + x} \, dx = \int x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \, dx = \frac{x^2}{2} - 2 \log(|x|) + \log(|x+1|)$$

(d) Considerando a mudança de variável $\sqrt{x-1} = y \Leftrightarrow x = y^2 + 1$ (e portanto $dx = 2y dy$), temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{y}{y^2+1} 2y dy \\ &= 2 \int \frac{y^2+1-1}{y^2+1} dy \\ &= 2 \int 1 - \frac{1}{y^2+1} dy \\ &= 2(y - \operatorname{arctg} y) \\ &= 2\sqrt{x-1} - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x-1})\end{aligned}$$

3- Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3 \leq y \leq -\frac{2}{x} \wedge x > 0\}$$

Esboce o conjunto S e calcule a sua área.

Resposta à questão 3:

Para $x > 0$ temos que

$$x - 3 \leq -\frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Portanto o conjunto S está compreendido entre as curvas de equação cartesiana $y = -\frac{2}{x}$ (acima) e $y = x - 3$ (abaixo) para valores de x entre 1 e 2.

Deste modo a sua área será dada pelo valor do integral definido

$$\int_1^2 \left(-\frac{2}{x} - x + 3\right) dx = \left[-2 \log x - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{x=1}^{x=2} = -2 \log 2 - 2 + 6 - \left(-2 \log 1 - \frac{1}{2} + 3\right) = -2 \log 2 + \frac{3}{2}$$

Nota- Por motivos técnicos esta resolução não inclui um esboço de S .

4- Determine o polinómio de Taylor de grau 2 em torno do ponto $a = 2$ da função

$$f(x) = \int_2^x e^{t^2} dt$$

Nota: não tente primitivar a função e^{t^2} .

Resposta à questão 4:

O polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 2$ da função $f(x) = \int_2^x e^{t^2} dt$ é dado pela expressão:

$$p_{2,2}(x) = f(2) + f'(2)(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2$$

$$f(x) = \int_2^x e^{t^2} dt \Rightarrow f(2) = \int_2^2 e^{t^2} dt = 0,$$

$$f'(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(2) = e^4,$$

$$f''(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f''(2) = 4e^4.$$

Portanto, o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 2$ da função $f(x) = \int_2^x e^{t^2} dt$ é

$$p_{2,2}(x) = e^4(x - 2) + 2e^4(x - 2)^2$$

5- Determine a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+3} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

Resposta à questão 5:

(a) Vamos comparar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+3}$ com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n+2}}{n^2+3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim \frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{n+2}}{n^2+3} = \lim \frac{n^2\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{n^2(1+\frac{3}{n^2})} = 1$$

Como $1 \in]0, +\infty[$ temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+3}$ tem a mesma natureza que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, que é convergente pelo critério de Dirichlet ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$).

(b) Seja $a_n = \frac{3^n}{n!}$.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim \frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!} = \lim \frac{3}{n+1} = 0$$

Como $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, temos, pelo critério da razão, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ é convergente.

6- Seja f uma função definida e contínua em \mathbb{R}^+ que satisfaz a seguinte igualdade:

$$xf(x) = \int_1^x (f(t) - 3 + t) dt$$

(a) Diga, justificando, se f é diferenciável ou não.

(b) Determine f .

(c) Mostre que existe um ponto $a \in]1, 2[$ tal que $f(a) + a = 2f(2) + 3$. (Sugestão: use o teorema de Lagrange)

Resposta à questão 6:

(a) Sendo f uma função contínua em $]0, +\infty[$ (de acordo com o enunciado) temos que $f(t) - 3 + t$ é também uma função contínua em $]0, +\infty[$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral indefinido $\int_1^x (f(t) - 3 + t) dt$ é uma função diferenciável em $]0, +\infty[$. Logo $f(x) = \frac{1}{x} \int_1^x (f(t) - 3 + t) dt$ é uma função diferenciável em $]0, +\infty[$.

(b) Derivando ambos os termos da igualdade

$$(1) \quad xf(x) = \int_1^x (f(t) - 3 + t) dt$$

(usando o Teorema Fundamental do Cálculo no segundo termo) obtemos a seguinte igualdade

$$f(x) + xf'(x) = f(x) - 3 + x$$

donde tiramos

$$f'(x) = -\frac{3}{x} + 1$$

Portanto, $f(x)$ é uma primitiva de $-\frac{3}{x} + 1$, logo

$$f(x) = -3 \log x + x + c$$

sendo c uma constante.

Além disso, f satisfaz a igualdade 1, donde resulta, com $x = 1$, que

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow c = -1 + 3 \log 1 = -1$$

Resumindo, a função f é dada pela expressão

$$f(x) = -3 \log x + x - 1$$

(c) Seja $\varphi(x) = xf(x) = \int_1^x (f(t) - 3 + t) dt$, φ é contínua em $[1, 2]$ e diferenciável em $]1, 2[$. Logo, pelo teorema de Lagrange, existe $a \in]1, 2[$ tal que

$$(2) \quad \varphi'(a) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2 - 1} = \varphi(2) - \varphi(1)$$

Como $\varphi(x) = xf(x)$ temos que $\varphi(2) = 2f(2)$. Por outro lado, sendo $\varphi(x) = \int_1^x (f(t) - 3 + t) dt$, temos que $\varphi(1) = \int_1^1 (f(t) - 3 + t) dt = 0$ e, pelo teorema fundamental do cálculo, $\varphi'(a) = f(a) - 3 + a$.

Assim sai de **2**,

$$f(a) - 3 + a = 2f(2) \Leftrightarrow f(a) + a = 2f(2) + 3.$$