2^o-Teste (com resolução)

Cálculo Diferencial e Integral I

Cursos LEE, LEGI, LEIC e LERC 2^o Semestre de 2010/2011

Duração: hora e meia

Versão A

1- Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

(b) Determine, se existirem, os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to-1} \frac{f(x)}{\log(-x)}$$

Resposta à questão 1:

(a)

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x^2+3)-(x+1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-(x+1)(2x)}{(x^2+3)^2} =$$
$$= \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2} = -\frac{x^2+2x-3}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$$Cal.Aux.: \quad x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$$

x		-3		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$

Portanto temos que f tem um mínimo local em $x=-3$ com valor $f(-3) = -\frac{1}{6}$ e um máximo local em $x=1$ com valor $f(1)=\frac{1}{2}$.

Os intervalos de monotonia são:
$]-\infty,-3[$ onde f é decrescente,
$]-3,1[$ onde f é crescente, e
$]1,+\infty[$ onde f é decrescente.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+\frac{3}{x^2})} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{\log(-x)}\left(=\frac{0}{0}\right) \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to-1}\frac{f'(x)}{\frac{-1}{-x}} = -f'(-1) = \frac{(-1+3)(-1-1)}{((-1)^2+3)^2} = -\frac{1}{4}$$

2- Determine, no seu domínio, uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $e^x + (2 + \operatorname{sen} x)^3 \cos x$;

(b) $\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(c) $\frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+x}$;

(d) $\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}$ (faça $\sqrt{x+2} = y$).

Resposta à questão 2:

(a) $\int e^x + (2 + \operatorname{sen} x)^3 \cos x \,\mathrm{dx} = \int e^x \,\mathrm{dx} + \int (2 + \operatorname{sen} x)^3 \cos x \,\mathrm{dx} = e^x + \frac{(2+\operatorname{sen} x)^4}{4}$.

(b) Primitivando por partes: $\int u'v = uv - \int uv'$ com $u' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $v = \arctan(\sqrt{x})$. Portanto temos $u = 2\sqrt{x}$ e $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x}^2)} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. Aplicando a fórmula da primitivação por partes obtemos:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \,\mathrm{dx} &= 2\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}) - \int \tfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)} \,\mathrm{dx} \\
&= 2\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}) - \int \tfrac{1}{x+1} \,\mathrm{dx} \\
&= 2\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}) - \log(x+1)
\end{aligned}$$

(c)

$$\frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+x} = x + \frac{x-1}{x(x+1)}$$

$\frac{x-1}{x(x+1)}$ decompõe-se em fracções simples da seguinte forma:

$$\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

onde A e B são as únicas constantes que verificam a igualdade. Estas podem ser determinadas atribuindo à equação $x - 1 = A(x+1) + Bx$ os valores de $x = 0$ (donde sai $A = -1$) e $x = -1$ (donde sai $B = 2$).

Assim, temos que

$$\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+x} \,\mathrm{dx} = \int x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} \,\mathrm{dx} = \frac{x^2}{2} - \log(|x|) + 2\log(|x+1|)$$

(d) Considerando a mudança de variável $\sqrt{x+2} = y \Leftrightarrow x = y^2 - 2$ (e portanto $\mathrm{dx} = 2y\,\mathrm{dy}$), temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}\,\mathrm{dx} &= \int \frac{1}{y+1} 2y\,\mathrm{dy} \\
&= 2\int \frac{y+1-1}{y+1}\,\mathrm{dy} \\
&= 2\int 1 - \frac{1}{y+1}\,\mathrm{dy} \\
&= 2(y - \log(y+1)) \\
&= 2\sqrt{x+2} - 2\log(\sqrt{x+2}+1)
\end{aligned}$$

3- Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{x} \le y \le 4 - x \wedge x > 0\}$$

Esboce o conjunto S e calcule a sua área.

Resposta à questão 3:

Para $x > 0$ temos que

$$\frac{3}{x} \le 4 - x \Leftrightarrow 3 \le 4x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$$

Portanto o conjunto S está compreendido entre as curvas de equação cartesiana $y = 4-x$ (acima) e $y = \frac{3}{x}$ (abaixo) para valores de x entre 1 e 3.

Deste modo a sua área será dada pelo valor do integral definido

$$\int_1^3 (4-x-\frac{3}{x})dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - 3\log x\right]_{x=1}^{x=3} = 12-\frac{9}{2}-3\log 3-(4-\frac{1}{2}-3\log 1) = 4-3\log 3$$

Nota- Por motivos técnicos esta resolução não inclui um esboço de S.

4- Determine o polinómio de Taylor de grau 2 em torno do ponto $a = 1$ da função

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{dt}$$

Nota: não tente primitivar a função e^{t^2}.

Resposta à questão 4:

O polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 1$ da função $f(x) = \int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{dt}$ é dado pela expressão:

$$p_{2,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$f(x) = \int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{dt} \Rightarrow f(1) = \int_1^1 e^{t^2}\,\mathrm{dt} = 0,$
$f'(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(1) = e,$
$f''(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f''(1) = 2e.$
Portanto, o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 1$ da função $f(x) = \int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{dt}$ é

$$p_{2,1}(x) = e(x-1) + e(x-1)^2$$

5- Determine a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - n + 3}}{n^2 + n + 2} \qquad\qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Resposta à questão 5:

(a) Vamos comparar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-n+3}}{n^2+n+2}$ com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n^2-n+3}}{n^2+n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n\sqrt{n^2 - n + 3}}{n^2 + n + 2} = \lim \frac{n^2\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}}{n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2})} = 1$$

Como $1 \in]0, +\infty[$ temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-n+3}}{n^2+n+2}$ tem a mesma natureza que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que é divergente pelo critério de Dirichlet ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$).

(b) Seja $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim \frac{2}{n+1} = 0$$

Como $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, temos, pelo critério da razão, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ é convergente.

6- Seja f uma função definida e contínua em $\mathbb{R}^+$ que satisfaz a seguinte igualdade:

$$xf(x) = \int_1^x (f(t) + 3 - t)\,\mathrm{dt}$$

(a) Diga, justificando, se f é diferenciável ou não.

(b) Determine f.

(c) Mostre que existe um ponto $a \in]1,2[$ tal que $f(a) - a = 2f(2) - 3$. (Sugestão: use o teorema de Lagrange)

Resposta à questão 6:

(a) Sendo f uma função contínua em $]0,+\infty[$ (de acordo com o enunciado) temos que $f(t) + 3 - t$ é também uma função contínua em $]0,+\infty[$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral indefinido $\int_1^x (f(t) + 3 - t)\,\mathrm{dt}$ é uma função diferenciável em $]0,+\infty[$. Logo $f(x) = \frac{1}{x}\int_1^x (f(t) + 3 - t)\,\mathrm{dt}$ é uma função diferenciável em $]0,+\infty[$.

(b) Derivando ambos os termos da igualdade

$$xf(x) = \int_1^x (f(t) + 3 - t)\,\mathrm{dt} \tag{1}$$

(usando o Teorema Fundamental do Cálculo no segundo termo) obtemos a seguinte igualdade

$$f(x) + xf'(x) = f(x) + 3 - x$$

donde tiramos

$$f'(x) = \frac{3}{x} - 1$$

Portanto, $f(x)$ é uma primitiva de $\frac{3}{x} - 1$, logo

$$f(x) = 3\log x - x + c$$

sendo c uma constante.

Além disso, f satisfaz a igualdade 1, donde resulta, com $x = 1$, que

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow c = 1 - 3\log 1 = 1$$

Resumindo, a função f é dada pela expressão

$$f(x) = 3\log x - x + 1$$

(c) Seja $\varphi(x) = xf(x) = \int_1^x (f(t) + 3 - t)\,\mathrm{dt}$, φ é contínua em $[1,2]$ e diferenciável em $]1,2[$. Logo, pelo teorema de Lagrange, existe $a \in]1,2[$ tal que

$$\varphi'(a) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2 - 1} = \varphi(2) - \varphi(1) \tag{2}$$

Como $\varphi(x) = xf(x)$ temos que $\varphi(2) = 2f(2)$. Por outro lado, sendo $\varphi(x) = \int_1^x (f(t) + 3 - t)\,\mathrm{dt}$, temos que $\varphi(1) = \int_1^1 (f(t) + 3 - t)\,\mathrm{dt} = 0$ e, pelo teorema fundamental do cálculo, $\varphi'(a) = f(a) + 3 - a$.

Assim sai de 2,

$$f(a) + 3 - a = 2f(2) \Leftrightarrow f(a) - a = 2f(2) - 3.$$