1^o-Teste (Com resolução)

Cálculo Diferencial e Integral I

Cursos LEE, LEGI, LEIC e LERC 2^o Semestre de 2010/2011

Duração: hora e meia

Versão B

1- Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |4x - 2| \geq x^2 + 2\} \qquad B =]-2, 5[$$

(a) Mostre que $A = [-4, 0] \cup \{2\}$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap B$.

Resposta à questão 1:

(a)

$$|4x - 2| \geq x^2 + 2 \Leftrightarrow 4x - 2 \geq x^2 + 2 \vee 4x - 2 \leq -x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 0 \vee x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 \leq 0 \vee x(x + 4) \leq 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee (x \geq -4 \wedge x \leq 0)$$

Portanto $A = [-4, 0] \cup \{2\}$.

(b) $A \cap B =]-2, 0] \cup \{2\}$.

O conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é $[2, +\infty[$, o conjunto dos minorantes de $A \cap B$ é $]-\infty, -2]$, o supremo de $A \cap B$ é 2, o ínfimo de $A \cap B$ é -2, o máximo de $A \cap B$ é 2 e o mínimo de $A \cap B$ não existe (pois o ínfimo não pertence a $A \cap B$).

2- A sucessão u_n encontra-se definida através de:

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}$$

(a) Mostre que u_n é uma sucessão decrescente e que $u_n > 1$, para todo o número natural n.

(b) Mostre que u_n é convergente e calcule o seu limite.

Resposta à questão 2:

(a) Vamos mostrar primeiro por indução que $u_n > u_{n+1} > 1$ para todo o número natural n (o que mostra que a sucessão é decrescente e minorada por 1):
Para $n = 1$ a proposição é verdadeira pois equivale $3 > \frac{17}{6} > 1$ (já que $u_1 = 3$ e $u_2 = \frac{17}{6}$).
Consideremos agora, por hiótese de indução, que

$$u_n > u_{n+1} > 1 \quad \text{Hipótese de indução (H.I.)}$$

para um n fixo. Vamos então usar esta hipótese para demonstrar a tese de indução:

$$u_{n+1} > u_{n+2} > 1 \quad \text{Tese de indução}$$

$$\textit{demostração:} \quad u_n > u_{n+1} > 1 \overset{1>0}{\Rightarrow} u_n^2 > u_{n+1}^2 > 1 \Rightarrow u_n^2 + 8 > u_{n+1}^2 + 8 > 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{u_n^2 + 8}{6} > \frac{u_{n+1}^2 + 8}{6} > \frac{9}{6} \overset{\frac{9}{6}>1}{\Rightarrow} u_{n+1} > u_{n+2} > 1.$$

(b) Como u_n é uma sucessão decrescente e minorada então é convergente. Seja $L = \lim u_n$, então temos que:

$$L = \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 8}{6} = \frac{(\lim u_n)^2 + 8}{6} = \frac{L^2 + 8}{6}$$

Desta igualdade tiramos que $L^2 - 6L + 8 = 0$, logo $L = 2$ ou $L = 4$. Como $u_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, o limite não pode ser 4 logo tem que ser 2.

3- Considere a seguinte função f definida em todo o $\mathbb{R}$ pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} + \frac{\alpha}{x} & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \sqrt{x^2+\beta} - |x| & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

sendo α e β os valores reais que tornam a função f contínua em todo o $\mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α e β.

(b) Calcule os limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

(c) Prove que f tem um máximo sem necessariamente determiná-lo.

Nota: No enunciado feito durante o teste estava $\sqrt{x^2+\beta} - x$ em vez de $\sqrt{x^2+\beta} - |x|$ o que impossibilitava a resolução da alínea (c).

Resposta à questão 3:

(a) Para que f seja contínua em todo o $\mathbb{R}$, em particular para $x = 1$, é necessário que

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} + \frac{\alpha}{x} = \left(\lim_{x\to1^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi(x-1)+\pi)}{x-1}\right) + \alpha = \left(\lim_{x\to1^+} \frac{-\operatorname{sen}(\pi(x-1))}{\pi(x-1)}\pi\right) + \alpha =$$

$$= \left(\lim_{y=\pi(x-1)\to0^+} -\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\pi\right) + \alpha = -\pi + \alpha$$

Portanto, $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ se só se $-\pi + \alpha = 1$, ou seja, $\alpha = 1 + \pi$.
Por outro lado,

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \sqrt{x^2+\beta} - |x| = \sqrt{1+\beta} - 1$$

Assim, $\lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ se só se $\sqrt{1+\beta} - 1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\beta} = 2 \Leftrightarrow \beta = 3$.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} + \frac{\alpha}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} - 0 = 0$$

pois $\operatorname{sen}(\pi x)$ é uma função limitada e $x - 1 \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+\beta} - |x| = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+\beta} - |x|)(\sqrt{x^2+\beta} + |x|)}{\sqrt{x^2+\beta} + |x|} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+\beta-|x|^2}{\sqrt{x^2+\beta}+|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\beta}{\sqrt{x^2+\beta}+|x|} = 0$$

Nota: Como estava no enuciado original ficaria apenas:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+\beta} - x = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

(c) Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) < 1$ para quaisquer $x < a$ ou $x > b$. Por outro lado, como f é contínua em $\mathbb{R}$ (e em particular em $[a, b]$), pelo teorema de Weierstrass, f tem máximo em $[a, b]$. Seja M o máximo de f em $[a, b]$. Como $f(0) = 1$ e

$f(x) < 1$ para qualquer $x \notin [a,b]$, $0 \in [a,b]$ logo $m \geq f(0) = 1$. Concluimos então que m é máximo da função em todo o $\mathbb{R}$. Logo f tem máximo absoluto.

Nota: Como estava no enuciado original, f não teria máximo pois $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

4- Caso existam, calcule os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$) das seguintes sucessões:

$$u_n = \frac{\sqrt{4^{n+1} - n}}{n^3 + 2^n}, \quad v_n = \sqrt[n]{3^n + n}, \quad w_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$$

Resposta à questão 4:

u_n:

$$\lim u_n = \lim \frac{\sqrt{4^{n+1} - n}}{n^3 + 2^n} = \lim \frac{2^n\sqrt{4 + \frac{n}{4^n}}}{2^n(\frac{n^3}{2^n} + 1)} = \lim \frac{\sqrt{4 + \frac{n}{4^n}}}{\frac{n^3}{2^n} + 1} = \sqrt{4} = 2$$

v_n:

$$\lim v_n = \lim \sqrt[n]{3^n + n} = \lim 3\sqrt[n]{1 + \frac{n}{3^n}} = 3$$

Ou alternativamente, $v_n = \lim \sqrt[n]{a_n}$ com $a_n = 3^n + n$. Como

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^{n+1} + (n+1)}{3^n + n} = \lim \frac{3^n(3 + \frac{n+1}{3^n})}{3^n(1 + \frac{n}{3^n})} = 3$$

temos que $\lim v_n = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$.

w_n:

$$\lim w_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n} = \lim \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{2n+2} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{-2} =$$

$$= \lim \left[\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^2 \lim \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{-2} = \left(e^2\right)^2 \times 1^{-2} = e^4$$

Ou alternativamente,

$$\lim \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim \left[\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = \left[\lim \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\lim \frac{2n}{n+1}} = \left(e^2\right)^2 = e^4$$

5- Calcule as derivadas das funções dadas pelas seguintes expressões:

$$f(x) = \operatorname{arctg}(3x)\operatorname{sen}x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\log(x^2+2)}{x}$$

Resposta à questão 5:

$$f'(x) = (\operatorname{arctg}(3x)\operatorname{sen}x)' = (\operatorname{arctg}(3x))'\operatorname{sen}x + \operatorname{arctg}(3x)(\operatorname{sen}x)' =$$
$$= \frac{(3x)'}{1+(3x)^2}\operatorname{sen}x + \operatorname{arctg}(3x)\cos x = \frac{3\operatorname{sen}x}{1+9x^2} + \operatorname{arctg}(3x)\cos x$$

$$g'(x) = \left(\frac{\log(x^2+2)}{x}\right)' = \frac{(\log(x^2+2))'x - \log(x^2+2)x'}{x^2} =$$
$$= \frac{\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}x - \log(x^2+2)}{x^2} = \frac{\frac{2x}{x^2+2}x - \log(x^2+2)}{x^2} = \frac{2}{x^2+2} - \frac{\log(x^2+2)}{x^2}$$

6- Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(f(x)) = -x$. Mostre que f não pode ser contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Sugestão: Mostre que f é injectiva e não é monótona.

Resposta à questão 6:

Por definição, f é injectiva se $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Ora $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Leftrightarrow -a = -b \Leftrightarrow a = b$, portanto f é injectiva.

Se f fosse crescente teríamos $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow f(f(a)) \leq f(f(b)) \Leftrightarrow -a \leq -b \Leftrightarrow a \geq b$ o que é absurdo. Por outro lado, se f fosse decrescente teríamos $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \Rightarrow f(f(a)) \leq f(f(b)) \Leftrightarrow -a \leq -b \Leftrightarrow a \geq b$ o que também é absurdo. Portanto f não pode ser monótona.

Sabemos, por um corolário do teorema do valor intermédio (ou de Bolzano), que uma função contínua num intervalo é injectiva se e só se for estritamente monótona. Como f é injectiva e não é monótona em $\mathbb{R}$ concluimos que f não pode ser contínua em $\mathbb{R}$.