Teorema de Gelfand-Naimark

Trabalho no âmbito da defesa de nota da disciplina de Análise Funcional

João Paulos, Nº 67926

LMAC

25 de Junho de 2013

Resumo

São apresentados alguns resultados elementares sobre álgebras de Banach, com ênfase no caso das C*-álgebras. O *desideratum* desta exposição é compreender o grande Teorema de Gelfand-Naimark, que caracteriza de forma profunda as C*-álgebras, relacionando-as com espaços de operadores lineares limitados $L(H)$ de espaços de Hilbert H. São ainda apresentados exemplos de álgebras de Banach que não podem ser mergulhadas isometricamente em nenhum $L(H)$.

Conteúdo

1 Definições. Factos elementares sobre espectros de Álgebras de Banach.

Definição 1 *(**Álgebra**) Uma álgebra $\mathbb{A}$ é um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (* ao longo do texto consideramos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o corpo dos complexos*) com uma operação adicional $\bullet : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, bilinear e associativa e que usualmente se chama de operação de multiplicação. Costuma denotar-se : $\bullet(x, y) = xy$. Naturalmente, dizemos que a álgebra $\mathbb{A}$ é comutativa se e só se $xy = yx$.*

Definição 2 *(**Álgebra Normada**) Uma álgebra $\mathbb{A}$, com uma aplicação $\| \,.\, \|: \mathbb{A} \to \mathbb{R}_0^+$ que obedece aos axiomas de uma norma e além disso tal que $||xy|| \leq ||x||||y||$, $\forall x, y \in \mathbb{A}$, diz-se uma álgebra normada.*

Notemos que uma álgebra normada $\mathbb{A}$ é um espaço normado e como tal, podemos proceder da forma usual e definir uma distância $d(x, y) = ||x - y||$ em $\mathbb{A}$, induzindo assim em $\mathbb{A}$ uma topologia enquanto espaço métrico. Se o espaço métrico induzido deste modo fôr completo, diz-se que $\mathbb{A}$ é uma **Álgebra de Banach**.

Definição 3 *(**Involução**) Dada uma álgebra de Banach $\mathbb{A}$, uma involução em $\mathbb{A}$ é uma função $* : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que, $\forall x, y \in \mathbb{A}$ verifique:*

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$
2. $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
3. $(xy)^* = y^* x^*$
4. $(x^*)^* = x$
5. $||x^*|| = ||x||$

Definição 4 *(**C*-Álgebra**) Trata-se de uma álgebra de Banach com involução tal que para todo $x \in \mathbb{A}$ se verifica $||x^* x|| = ||x||^2$.*

Por simplicidade, iremos considerar sempre álgebras com unidade, i.e. álgebras $\mathbb{A}$ onde existe um elemento 1 tal que $\forall x \in \mathbb{A} : 1x = x1 = x$.

Definição 5 *(**Homomorfismo de Álgebras**) Dadas duas álgebras $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, diz-se que uma função $\Psi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é um homomorfismo se Ψ fôr linear e preservar a operação de multiplicação, i.e $\forall x, y \in \mathbb{A} : \Psi(xy) = \Psi(x)\Psi(y)$.*

Definição 6 *(**Espectro de Álgebra**) Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach. Ao conjunto de todos os homomorfimos não-nulos de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{C}$, chamamos o espectro de $\mathbb{A}$ e denotamos por $H(\mathbb{A})$.*

Lema 7 *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach e $\Psi : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ um homomorfismo não nulo. Então, Ψ é contínua.*

Prova: Primeiro notemos que $\Psi(1_{\mathbb{A}}b) = \Psi(b1_{\mathbb{A}}) = \Psi(b) = \Psi(b)\Psi(1_{\mathbb{A}}) = \Psi(1_{\mathbb{A}})\Psi(b)$ e como tal, $\Psi(1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{C}}$. Dado $x \in \mathbb{A}$ é imediato que $x - \Psi(x) \in \ker(\Psi)$ e como $ker(\Psi)$ é um ideal, claro que $x - \Psi(x)$ não pode ser invertível (*caso contrário* $1 \in \ker(\Psi)$ *e deste modo,* $\Psi = 0$). Assim, $\Psi(x) \in \sigma(x)$ (onde $\sigma(x)$ denota, como usualmente, o espectro do elemento x) e como tal, $\mid \Psi(x) \mid \leq \parallel x \parallel$. Deste modo, $\mid \Psi(x) - \Psi(y) \mid \leq \parallel x - y \parallel$ e como tal, Ψ é contínua. ■

Note-se que pelo lema anterior, $H(\mathbb{A}) \subset \bar{B}_{\mathbb{A}^*} = \{f \in \mathbb{A}^* : \parallel f \parallel \leq 1\}$. Assim, o espectro de uma álgebra é um subconjunto da bola unitária fechada do dual $\mathbb{A}^*$. Recorde-se que pelo Teorema de Banach-Alaoglu, $\bar{B}_{\mathbb{A}^*}$ é compacta na topologia fraca*. [1]

Teorema 8 *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach comutativa e com unidade. Então, para todo $x \in \mathbb{A}$ temos que $\sigma(x) = \{\Psi(x) : \Psi \in H(\mathbb{A})\}$.*

Prova: Uma das inclusões já foi demonstrada aquando da prova do Lema 7, pois vimos que $\Psi(x) \in \sigma(x)$. Passamos a provar que $\sigma(x) \subset \{\Psi(x) : \Psi \in H(\mathbb{A})\}$. Seja $\lambda \in \sigma(x)$ e defina-se $A = \{(\lambda - x)y : y \in \mathbb{A}\}$, onde $(\lambda - x)$ significa, por abuso de notação, $(\lambda 1 - x)$. Como a álgebra é comutativa, A é um ideal e por escolha de λ, temos que $(\lambda - x)$ não é invertível e assim, $1 \notin A$ e consequentemente $A \subsetneq \mathbb{A}$. Agora, por uma das formas equivalentes do Lema de Zorn - que garante a existência de ideais maximais em anéis com unidade - existe um ideal maximal

[1] Recorde-se que X^* na topologia fraca* é Hausdorff e que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to f$ se e só se $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$. Recorde-se ainda o Teorema de Banach-Alaoglu que garante que $\bar{B}_{X^*}$ é compacta na topologia fraca*, ao contrário do que aconteceria se considerarmos a topologia da métrica induzida pela norma em X^*, pelo Teorema de Riesz - excepto se $\dim(X^*) < \infty$

I tal que $A \subset I$. Tendo em vista formar o quociente $\mathbb{A}/I$, provamos que I é fechado : Note-se que se I não fôr fechado, então $I \subsetneq \bar{I}$ e como tal, pela maximalidade de I, temos que $\bar{I} = \mathbb{A}$. Ora, isto é o mesmo que dizer que I é denso e como o conjunto dos elementos invertíveis de $\mathbb{A}$ é aberto, concluimos, por I ser ideal, que $1 \in I$ e portanto $I = \mathbb{A}$, o que é impossível. Assim sendo, tomando o espaço quociente $\mathbb{A}/I$ com a usual norma quociente, temos que $\mathbb{B} = \mathbb{A}/I$ é ainda uma álgebra de Banach.
É fácil de verificar que na verdade, $\mathbb{B} \approx \mathbb{C}$ e assim sendo, a aplicação de projecção usual no quociente é um elemento de $H(\mathbb{A})$. Assim, como $(\lambda - x) \in I = \ker(\pi)$, temos que $\pi(x) = \lambda$ e concluimos o pretendido. ■

Corolário 9 *O espectro de uma álgebra de Banach comutativa e com unidade é não-vazio.*

Prova: O resultado é imediato do teorema anterior e lembrando que o espectro de um elemento de uma álgebra de Banach, é sempre não vazio.

O teorema anterior permite-nos relacionar o espectro de um elemento de uma álgebra, com o espectro da própria álgebra. É ainda útil notar que além de não vazio, o espectro de uma álgebra (tal como acontecia com o espectro de um elemento de uma álgebra) é compacto :

Teorema 10 *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach. Então, $H(\mathbb{A})$ é compacto.*

Prova: Seja T o conjunto de todos os homomorfismos de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{C}$. Como $T = H(\mathbb{A}) \cup \{0\}$, temos que $T \subset \bar{B}_{\mathbb{A}^*}$. Além disso, sabemos que pelo Teorema de Banach-Alaoglu, $\bar{B}_{\mathbb{A}^*}$ é compacta na topologia fraca*. Como $\mathbb{A}^*$ nessa topologia é Hausdorff, $\{0\}$ é fechado e assim, basta provar que T é um subespaço fechado de $\bar{B}_{\mathbb{A}^*}$ para concluir que $H(\mathbb{A})$ é compacto. Ora, dada sucessão $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \to f$, temos que $\forall x, y \in \mathbb{A}$ que $f_n(x + y) \to f(x + y)$, pela convergência na topologia fraca*. Por outro lado, $f_n(x + y) = f_n(x) + f_n(y)$ e claro que $f_n(x) \to f(x)$ e que $f_n(y) \to f(y)$. De novo, como $\mathbb{A}^*$ é Hausdorff na topologia fraca*, o limite é único e concluimos que f é linear. De forma análoga, concluimos que f é fechado para a operação de multiplicação e como tal, $f \in T$ e assim, T é fechado. ■ ■

2 Teorema de Gelfand para C*-álgebras comutativas

Ao longo deste capítulo consideraremos sempre que $\mathbb{A}$ é uma C*-álgebra comutativa.
Defina-se $\hat{x} : H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ tal que $\hat{x}(\Psi) = \Psi(x)$. Note-se que $\hat{x}$ é contínua (*na topologia fraca**),

uma vez dada uma rede $\Psi_\alpha \to \Psi$ em $H(\mathbb{A})$, temos que $\hat{x}(\Psi_\alpha) = \Psi_\alpha(x) \to \Psi(x) = \hat{x}(\Psi)$. [2]

Definição 11 *(**Transformada de Gelfand**) A transformada de Gelfand de $\mathbb{A}$ é a função $\kappa : X \to C(H(\mathbb{A}))$ tal[3] que $\kappa(x) = \hat{x}$.*

Teorema 12 *Dado $x \in \mathbb{A}$, temos que $\| \kappa(x) \| = r(x)$, onde $r(x)$ é o raio espectral de x.*

Prova: Basta observar que

$$\| \kappa(x) \| = \| \hat{x} \| = \sup\{\Psi(x) : \Psi \in H(\mathbb{A})\} = \sup\{| \lambda | : \lambda \in \sigma(x)\} = r(x), \tag{1}$$

onde a penúltima igualdade é consequência do Teorema 8, que tem como hipótese a álgebra ser comutativa. ■

Corolário 13 *A Transformada de Gelfand é um homomorfismo contractivo.*

É curioso observar que se x é um elemento auto-adjunto de $\mathbb{A}$ (i.e $x = x^*$), temos que $r(x) = \| x \|$. De facto, é suficiente observar que $\| x \|^2 = \| xx^* \| = \| x^2 \|$. Através de um simples exercício de indução finita, concluimos que $\| x \|^{2^n} = \| x^{2^n} \|$ e como tal, $r(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^{2^n} \|^{\frac{1}{2^n}} = \| x \|$. Então, se x é um elemento auto-adjunto de uma C*-álgebra, temos que $\| \kappa(x) \| = r(x) = \| x \|$.

Desejamos agora extender esta observação de modo a concluir que de facto se $\mathbb{A}$ fôr uma C*-álgebra comutativa, a Transformada de Gelfand é na realidade um *-isomorfismo isométrico. Como resultado auxiliar, provamos que os homomorfismos definidos em $\mathbb{A}$ são tais que $\Psi(x^*) = \overline{\Psi(x)}$ para todo $x \in \mathbb{A}$ e deste modo, como $\kappa(x) \in H(\mathbb{A})$, concluimos que $\kappa(x^*) = \overline{\kappa(x)}$.

Lema 14 *Seja $\Psi \in H(\mathbb{A})$. Então, para todo o $x \in \mathbb{A}$ temos que $\Psi(x^*) = \overline{\Psi(x)}$*

Prova: O resultado é muito simples de estabelecer. Considere-se $x = a + ib$, com a e b auto-adjuntos (*ver nota de rodapé 6*). Temos que $\Psi(x^*) = \Psi(a - ib) = \Psi(a) - i\Psi(b) = \overline{\Psi(a) + i\Psi(b)} = \overline{\Psi(x)}$. ■

Teorema 15 *(**Teorema de Gelfand**) Seja $\mathbb{A}$ uma C^*-álgebra comutativa e com unidade. A transformada de Gelfand é um *-isomorfismo isométrico de $\mathbb{A}$ em $C(H(\mathbb{A}))$*

[2] Recorde-se que o uso de redes permite-nos expressar a continuidade sequencial como equivalente à continuidade. O uso desta técnica neste contexto é particularmente útil, capitalizando o uso da topologia fraca*.

[3] $C(X)$ é o conjunto das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$.

Prova: Seja $x \in \mathbb{A}$. Como x^*x é auto-adjunto, concluimos da nossa observação (*onde note-se, a hipótese da comutatividade é necessária*) que

$$\| x \|^2 = \| x^*x \| = \| \kappa(x^*x) \| = \| \kappa(x^*)\kappa(x) \| = \| \overline{\kappa(x)}\kappa(x) \| = \| \kappa(x) \|^2 \tag{2}$$

. Logo, κ é um homomorfismo isométrico. Para provar que κ é um homomorfismo sobrejectivo, invocamos o Teorema de Stone-Weierstrass.[4] De facto, se provarmos que $\kappa(\mathbb{A})$ separa pontos de $H(\mathbb{A})$, como pelo Teorema 10, $H(\mathbb{A})$ é compacto e como $H(\mathbb{A})$ é Hausdorff (topologia fraca*), temos que $\overline{\kappa(\mathbb{A})} = C(H(\mathbb{A}))$, pelo Teorema de Stone-Weierstrass. Deste modo, note-se que $\kappa(\mathbb{A})$ é fechado : Como κ é contractivo e $\mathbb{A}$ é completo, temos que $\kappa(\mathbb{A})$ é um subespaço completo de $C(H(\mathbb{A}))$. Mas, como $C(H(\mathbb{A}))$ é completo (topologia da convergência uniforme) concluimos que $\kappa(\mathbb{A})$ é fechado. Assim, $\kappa(\mathbb{A}) = C(H(\mathbb{A}))$ e portanto, κ é sobrejectivo. Ora, sejam $\Psi, \Omega \in H(\mathbb{A})$ distintos. Resta verificar que existe $x \in \mathbb{A}$ tal que $\kappa(x)(\Psi) \neq \kappa(x)(\Omega)$, ou seja, $\Psi(x) \neq \Omega(x)$. Mas isto é inteiramente óbvio uma vez que Ψ e Ω são distintos. ∎

Teorema 16 *Seja $\mathbb{A}$ uma C*-álgebra comutativa e com unidade e $Y \subset \mathbb{A}$ uma C*-subálgebra que contem a unidade de $\mathbb{A}$. Então, se $x \in Y$ é invertível em $\mathbb{A}$, temos que $x^{-1} \in Y$.*

Prova: Primeiro suponha-se que $x \in Y$ é invertível em $\mathbb{A}$ e é auto-adjunto. Sem perda de generalidade podemos considerar por questão de simplicidade Y como sendo a C*-subálgebra comutativa gerada por $\{1, x\}$. Assim, pelo Teorema de Gelfand, $Y \approx C(H(Y))$. Suponha-se, por contradição, que x não é invertível em Y e deste modo, $\kappa(x)$ tem zeros (pois $\kappa(x)(\Psi) = \Psi(x) \in \mathbb{C}$ e $\Psi(x) \in \mathbb{C}$ não é invertível sse $\Psi(x) = 0$). Deste modo, existe uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} \| x_n x \| = 0$, com $\| x_n \| = 1$. Deste modo chegamos a um absurdo pois $1 = \| x_n \| = \| a^{-1}ax_n \| \leq \| a^{-1} \| \| ax_n \| \to 0$. Assim, temos que a^*a e aa^* são invertíveis em $\mathbb{A}$, por serem auto-adjuntos. Então, facilmente se verifica que $((a^*a)^{-1}a^*)a = 1$ e que $a(a^*(aa^*)^{-1}) = 1$. Como $(a^*a)^{-1}$ e (aa^*) são elementos de Y, provámos o pretendido, uma vez que a unicidade dos inversos vale em $\mathbb{A}$. ∎

Corolário 17 *Seja $\mathbb{A}$ uma C*-álgebra comutativa e com unidade e $Y \subset \mathbb{A}$ uma C*-subálgebra que contem a unidade de $\mathbb{A}$. Então, o espectro de $x \in Y$ relativo a $\mathbb{A}$, $\sigma_{\mathbb{A}}(x)$ e o espectro de x relativo a Y, $\sigma_Y(x)$ são iguais.*

Prova: Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. O resultado resulta da observação que, pelo teorema anterior, $\lambda - x$ é invertível em $\mathbb{A}$ se e só se $\lambda - x$ é invertível em Y. ∎

[4] O Teorema de Stone-Weierstrass garante que se X é Hausdorff e compacto e $S \subset C(X)$, tal que S *separa pontos* (i.e $\forall a \neq b \in X \exists f \in S : f(a) \neq f(b)$), então a álgebra C* unitária gerada por S, é densa em $C(X)$.

3 Positividade

Ao longo deste capítulo, assumimos que $\mathbb{A}$ é uma C*-álgebra com unidade, mas não necessariamente comutativa.

Definição 18 *(**Elemento Positivo**) Um elemento $x \in \mathbb{A}$ diz-se positivo se é auto-adjunto (e como tal, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$) e além disso, $\sigma(x) \subset [0, \infty[$.*

O próximo teorema lista algumas propriedades dos elementos positivos e em conjunto com o lema seguinte, seremos capazes de caracterizar de forma alternativa (*e altamente sugestiva*) os elementos positivos de $\mathbb{A}$.

Teorema 19 *Seja $\mathbb{A}$ uma C*-álgebra com unidade. Então, temos as seguintes propriedades :*

1. *Seja $x \in \mathbb{A}$ tal que $x = x^*$. Então, existem elementos positivos x_+ e x_- em $\mathbb{A}$ tais que $x = x_+ - x_-$ e que $x_+x_- = 0$.*
2. *Se x e $-x$ são positivos, então $x = 0$.*
3. *Seja $x \in \mathbb{A}$ tal que $x = x^*$ e $\gamma \geq\| x \|$, com γ uma constante. Então, x é positivo se e só se $\| \gamma - x \|\leq \gamma$.*
4. *Se x e y são elementos positivos, então $x + y$ ainda é positivo.*
5. *Se $x = x^*$, então $\| x \| -x$ é um elemento positivo.*

Prova:

1. Seja $Y \subset \mathbb{A}$ a C*-subálgebra gerada por $\{1, x\}$. Pelo Teorema de Gelfand, $Y \approx C(H(Y))$. Deste modo, podemos identificar $x \in Y$ com uma função real contínua em $H(Y)$ (contínua porque os homomorfismos são contínuos e real porque sendo x é auto-adjunto, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$). Por outro lado, a cada elemento de $H(Y)$, posso associar um elemento de Y. Assim, defina-se $x_+ = \max\{x, 0\}$ e $x_- = \min\{-x, 0\}$. É evidente que enquanto funções, $x = x_+ - x_-$ e que $x_+x_- = 0$, pois se $x > 0$ então $0 > (-x)$. Como x_+ e x_- são funções reais positivas e $\Psi(x) \in \sigma(x)$ para $\Psi \in H(X)$, podemos concluir que x_+ e x_- são elementos positivos de Y. Pelo corolário 17, $\sigma_Y(x_+) = \sigma_X(x_+)$ e $\sigma_Y(x_-) = \sigma_X(x_-)$ e assim, são também elementos positivos de $\mathbb{A}$.
2. Se x e $-x$ são positivos, pelo Teorema da Aplicação Espectral [5]concluimos que $\sigma(x) = \{0\}$ e como x é auto-adjunto, $\| x \|= 0$ e assim, $x = 0$ (recorde-se da observação que se $x = x^*$, então $\| x \|= r(x)$).

[5]Teorema da Aplicação Espectral : Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra, $x \in X$ e $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. Então, $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$.

3. Como x é auto-adjunto e $\| x \| \leq \gamma$, temos que $\sigma(x) \subset [-\gamma, \gamma]$. Além disso, $\| \gamma - x \| = r(\gamma - x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} | \gamma - \lambda |$ e deste modo torna-se claro que $\| \gamma - x \| \leq \gamma$ se e só se $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$.

4. Basta usar a alínea anterior para verificar os cálculos.

5. Seja $x \in \mathbb{A}$, auto-adjunto. Então, $\sigma(x) \subset [- \| x \|, \| x \|]$ e assim, pelo Teorema Aplicação Espectral, $\sigma(\| x \| - x) \subset [0, 2 \| x \|]$ e como tal, $\| x \| - x$ é positivo.

■

Lema 20 *Seja $x \in \mathbb{A}$ tal que $-x^*x$ é positivo. Então, $x = 0$.*

Prova: Seja $x = a + ib$ com a e b auto-adjuntos[6]. Assim, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ e como tal, $\sigma(a^2) \subset \mathbb{R}_+$ e temos que a^2 é positivo. Analogamente, b^2 é igualmente positivo. Observe-se que $x^*x + xx^* = 2a^2 + 2b^2$. Recorde-se que $\sigma(-xx^*) \setminus \{0\} = \sigma(-x^*x) \setminus \{0\}$[7] e portanto, $-xx^*$ é positivo. Pelo lema anterior, x^*x é positivo e como tal, $x^*x = 0$ e consequentemente, $x = 0$. ■

Teorema 21 *Seja $\mathbb{A}$ uma C*-álgebra com unidade e seja $x \in \mathbb{A}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes :*

1. *x é um elemento positivo*
2. *$\exists y \in \mathbb{A} : y^2 = x$, com y auto-adjunto*
3. *$\exists y \in \mathbb{A} : y^*y = x$*

Prova: Primeiro prova-se que $(1) \Rightarrow (2)$: Considere-se Y a C*-subálgebra de $\mathbb{A}$ gerada por $\{1, x\}$. Pelo Teorema de Gelfand, $\{1, x\} \approx C(H(Y))$. Pelo Teorema 8, $\Im(\kappa(x)) = \sigma_Y(x) = \sigma_{\mathbb{A}}(x)$. Como por hipótese x é positivo, $\kappa(x)$ é uma função positiva em $H(Y)$. Tomando $t = \sqrt{\kappa(x)}$ e $y = \kappa^{-1}(t)$, identificando os elementos via Transformada de Gelfand do modo usual, concluimos que y é o elemento desejado. É trivial verificar que $(2) \Rightarrow (3)$, uma vez que $y^*y = y^2 = x$. Por fim, prova-se que $(3) \Rightarrow (1)$: Seja $x = y^*y$ e como tal, x é auto-adjunto. Assim, sabemos que existem elementos positivos x_+ e x_- tais que $x = x_+ - x_-$. Seja $z = yx_-$. Observe-se que $-z^*z = -x_-(x_+ - x_-)x_- = x_-^3$. Como x_- é positivo, pelo Teorema da Aplicação Espectral temos que x_-^3 é igualmente positivo. Logo, $-z^*z$ é positivo e como vimos anteriormente, isto implica que $z = 0$. Assim, $x_-^3 = 0$ e como tal, $x_- = 0$ e concluimos que $x = x_+$, ou seja, x é um elemento positivo. ■

[6] Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach com involução e $x \in \mathbb{A}$. Então, existem $a, b \in \mathbb{A}$ auto-adjuntos tais que $x = a + ib$, bastando tomar $a = \frac{x+x^*}{2}$ e $b = \frac{x-x^*}{2i}$.

[7] Sejam x, y elementos de uma álgebra de Banach. Então, $\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$

Corolário 22 *Se x é positivo temos que para todo $y \in \mathbb{A}$, y^*xy é ainda positivo.*

Prova: Pelo teorema anterior, $\exists z \in X : z^*z = x$ e assim, $y^*xy = y^*z^*zy = (zy)^*(zy)$ e como tal, também pelo teorema anterior, podemos concluir que y^*xy é positivo. ■

4 Representações e o Teorema de Gelfand-Naimark.

Com o objectivo em mente de constituir uma ponte entre álgebras de operadores e C*-álgebras, nasce o conceito de representação :

Definição 23 ***(Representação)*** *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach com involução e H um espaço de Hilbert. Uma representação de $\mathbb{A}$ em H é um *-homomorfismo*[8] $\pi : \mathbb{A} \to L(H)$.[9]

Com esta definição, podemos voltar a enunciar o objectivo deste texto : Provar a existência de uma representação isométrica para qualquer C*-álgebra, *reduzindo* assim o estudo das C*-álgebras ao estudo de C*-subálgebras de $L(H)$, espaços *à priori* mais simples.

Definição 24 ***(Funcional Positivo)*** *Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Diz-se que f é um funcional positivo se $\forall x \in \mathbb{A}$ se verifica que $f(x^*x) \geq 0$. No caso em que $f(1) = 1$, diz-se que f é um* ***estado****.*

Lema 25 *Seja $\mathbb{A}$ uma C*-álgebra com unidade e f um funcional positivo em $\mathbb{A}$. Dados $a, b \in \mathbb{A}$, defina-se $\langle a, b\rangle = f(a^*b)$. Então :*

1. $\forall a, b \in \mathbb{A} : | \langle a, b\rangle |^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$
2. *f é contínuo e* $\| f \| = f(1)$

Prova:

1. A prova é inteiramente semelhante à prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz.
2. Note-se que $\langle 1, b\rangle = f(b)$ e assim,

$$| f(b) |^2 \leq f(1)f(b^*b) \leq f(1) \| b^*b \| f(1) = f(1)^2 \| b \|^2, \tag{3}$$

onde a última desigualdade segue do Teorema 19(5). Assim, $\| f \| = f(1)$ e como $f(1) < \infty$, concluimos que f é contínuo.[10]

[8] Recorde-se que como π é um *-homomorfismo, temos que $\pi(x^*) = \pi(x)^*$.

[9] Denota-se o espaço dos operadores lineares e limitados de X em Y, dois espaços normados, por $L(X, Y)$.

[10] Recordar que como X e $\mathbb{C}$ são normados, f é limitada se e só se f é contínua.

■

O próximo lema fornece-nos um critério muito útil para verificar a positividade de um funcional:

Lema 26 *Seja $f \in \mathbb{A}^*$ tal que $\| f \| = f(1)$. Então, f é positivo.*

Prova: Sem perda de generalidade (se necessário procedemos a uma normalização), supomos que $f(1) = 1$. Seja $x \in \mathbb{A}$ positivo e temos que $f(x) = a + ib$, pois $f(x) \in \mathbb{C}$. Então, basta provarmos que $b = 0$ e $a \geq 0$. Ora, seja $\gamma \in \mathbb{R} : \gamma > \| x \|$ e pelo Teorema 19(3), temos que $\| \gamma - x \| \leq \gamma$ e por hipótese, como $\| f \| = 1$, temos que

$$\gamma - a \leq | \gamma - a - ib | = | f(\gamma - x) | \leq \| \gamma - x \| \leq \gamma. \tag{4}$$

Assim, $a > 0$. Por outro lado, defina-se para cada $n \in \mathbb{N}$, $b_n = x - a - inb$ e note-se que $f(b_n) = i(n+1)b$, pois $f(x) = ib$. Então,

$$(n^2 + 2n + 1)b^2 = | f(b_n) |^2 \leq \| b_n \|^2 = \| b_n^* b_n \| = \| (a-x)^2 + n^2 y^2 \| \leq \| (a-x)^2 \| + n^2 y^2 \tag{5}$$

e concluimos que $(2n+1)y^2 \leq \| (a-x)^2 \|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $y = 0$. ■

Teorema 27 *Seja $\mathbb{A}$ uma C^*-álgebra com unidade e $x \in \mathbb{A}$ auto-adjunto. Então, existe um estado tal que $| f(x) | = \| x \|$.*

Prova: Considere-se $Y \subset \mathbb{A}$, a C*-subálgebra gerada por $\{1, x\}$. Como $x = x^*$, sabemos que $r(x) = \| x \|$ e como tal, existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $| \lambda | = \| x \|$. Então, pelo Teorema 8, existe $\Psi \in H(Y)$ tal que $| \Psi(x) | = \| x \|$. Por outro lado, pelo Teorema de Hahn-Banach (uma vez que Ψ é contínuo), existe $f \in \mathbb{A}^*$ que prolonga Ψ e tal que $\| f \| = \| \Psi \|$. Ora, como $\Psi \in H(Y)$, sabemos que $\| \Psi(x) \| \leq \| x \|$ e deste modo, $\| \Psi \| \leq 1$. Mas, $| \Psi(1) | = 1$ e como tal, $\| \Psi \| = \| f \| = 1 = f(1)$. Então, pelo lema anterior, f é um estado. Além disso, como f prolonga Ψ, temos que $| f(x) | = | \Psi(x) | = \| x \|$. ■

Lema 28 *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach com involução e $\pi : \mathbb{A} \to L(H)$ uma representação. Então, $\| \pi(x) \| \leq \| x \|$.*

Prova: Ora, como π é um homomorfismo, temos que $\pi(1) = 1$. Além disso, se x é invertível, seja $\exists y \in \mathbb{A} : xy = yx = 1$ e como tal, $\pi(x)\pi(y) = \pi(y)\pi(x) = \pi(1) = 1$, ou seja, $\pi(x)$ é invertível. Logo, para todo $x \in \mathbb{A}$, temos que $\sigma(\pi(x)) \subset \sigma(x)$ e como tal, $r(\pi(x)) \leq r(x)$. Assim, como x^*x é auto-adjunto, $\| \pi(x) \|^2 = \| \pi(x^*x) \| = r(\pi(x^*x))$. Logo, $\| \pi(x) \|^2 \leq r(x^*x) \leq \| x^*x \| \leq \| x^* \| \| x \| = \| x \|^2$. ■

Note-se que do lema anterior segue a continuidade de π.

Definição 29 *(**Subespaço Invariante**) Seja π uma representação de $\mathbb{A}$ no espaço de Hilbert H. Diz-se que $K \subset H$ é invariante por π se $\forall x \in \mathbb{A} : \pi(x)K \subset K$. Se $K \subset H$ fôr um subespaço fechado e invariante por π, podemos definir uma nova representação (*note-se que como K é fechado, é ainda espaço de Hilbert*) $\rho : \mathbb{A} \to L(K)$, à qual designamos por **restrição** de π para K.*

Definição 30 *(**Espaço Cíclico**) Dado $\xi \in H$, seja $K = \overline{\pi(\mathbb{A})\xi} = \overline{\{\pi(x)\xi : x \in \mathbb{A}\}}$. Por definição, K é um subespaço de H fechado e invariante, ao qual se chama espaço cíclico (gerado por ξ).*

Definição 31 *(**Representação Cíclica**) Uma representação π de $\mathbb{A}$ em H diz-se cíclica se $\exists \xi \in H : \overline{\pi(\mathbb{A})\xi} = H$. Neste caso, diz-se que ξ é um vector cíclico.*

Teorema 32 *(**Construção de Gelfand-Naimark-Seagal**) Seja $\mathbb{A}$ uma C^*-álgebra com unidade e f um funcional positivo em $\mathbb{A}$. Então, existe uma representação cíclica π de $\mathbb{A}$ num espaço de Hilbert H, com um vector cíclico $\xi \in H$ tal que $f(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$.*

Prova: Recorde-se que no Lema 25 definimos $\langle a, b \rangle = f(a^*b)$, uma forma sesquilinear[11] e tal que $| \langle a, b \rangle |^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$ †. Considere-se agora $Z = \{x \in X : \langle x, x \rangle = 0\}$. Observe-se que $0 \in Z$ e que $x, y \in Z \Rightarrow x + y \in Z$. De facto, a desigualdade triangular é uma consequência de † e deste modo, $\langle a + b, a + b \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle a, a \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle b, b \rangle^{\frac{1}{2}}$. Assim, se $x, y \in Z$, temos que $\langle x + y, x + y \rangle^{\frac{1}{2}} \leq 0 + 0$ e podemos concluir que Z é um subespaço vectorial de $\mathbb{A}$. O próximo passo é considerar o quociente $\mathbb{A}/Z$ e definir-se do modo natural, $\langle a + Z, b + Z \rangle = \langle a, b \rangle$. É fácil de verificar que esta aplicação define um produto interno em $\mathbb{A}/Z$. *Vale a pena salientar o motivo pelo qual se procedeu ao quociente de $\mathbb{A}$ por Z : À partida, não se consegue garantir que $\langle a, b \rangle = f(a^*b)$ define um produto interno em $\mathbb{A}$, pois não se consegue assegurar que a aplicação não é degenerada. No entanto, quando se procede ao quociente, torna-se simples a verificação deste axioma do produto interno : $\langle a + Z, a + Z \rangle = \langle a, a \rangle = 0 \Rightarrow a \in Z$.* Deste modo, construímos um espaço pré-Hilberteano - o quociente $\mathbb{A}/Z$.

Dado $a \in \mathbb{A}$, defina-se $\pi_a : \mathbb{A}/Z \to \mathbb{A}/Z$ tal que $b + Z \mapsto ab + Z$. Provamos de seguida que π_a é uma aplicação bem definida e contínua. Ora, $\| ab + Z \|^2 = \langle ab, ab \rangle = f(b^*a^*ab)$ e como pelo

[11]Diz-se que uma forma é sesquilinear se é linear numa coordenada e antilinear na outra. Por exemplo : $f(\lambda u + v, w) = \overline{\lambda} f(u, w) + f(v, w)$ e $f(u, \lambda v + w) = \lambda f(u, v) + f(u, w)$.

Teorema 19, $\| a^*a \| - a^*a$ é positivo, então pelo Corolário 22 temos que $b^*(\| a^*a \| - a^*a)b$ é ainda positivo e assim, $f(b^*a^*ab) \leq \| a^*a \| f(b^*b) = \| a \|^2 \langle b+Z, b+Z \rangle$ e como tal, $\| ab+Z \| \leq \| a \| \| b+Z \|$. Assim, π_a se estiver bem definida, é contínua. De facto, está bem definida, pois seja $b_1 + Z = b_2 + Z$. Então, $\| ab_1 - ab_2 + Z \| \leq \| a \| \| b_1 - b2 - Z \| = 0$, logo $ab_1 + Z = ab_2 + Z$ e como tal, π_a está bem definida.
Considere-se agora a completude de $\mathbb{A}/Z$[12], a qual denotamos por H. É óbvio que por construção H é um espaço de Hilbert. Agora, dado $x \in \mathbb{A}$, seja $\pi(x)$ o único prolongamento contínuo de π_x para um operador limitado em H.[13] Podemos assim definir a representação $\pi : \mathbb{A} \to L(H)$ tal que $x \mapsto \pi(x)$. É fácil de verificar que π é na verdade uma representação cíclica com vector cíclico $\xi = 1+Z$, pois : $\overline{\pi(\mathbb{A})\xi} = \overline{\{\pi(x) + \pi(x)Z : x \in \mathbb{A}\}} = \overline{\{i(x+Z) : x \in \mathbb{A}\}} = H$. Por fim, verifica-se que $\langle \pi(x)\xi, \xi \rangle = \langle x+Z, 1+Z \rangle = f(x)$. ■

Teorema 33 ***(Teorema de Gelfand-Naimark)*** *Seja $\mathbb{A}$ uma C^*-álgebra. Então, existe uma representação isométrica de $\mathbb{A}$ num espaço de Hilbert H.*

Prova: Pelo Teorema 27, para cada $a \in \mathbb{A}$ existe um estado f de $\mathbb{A}$ tal que $| f(a^*a) | = \| a^*a \| = \| a \|^2$. Seja π^a a representação cíclica de $\mathbb{A}$ construída no teorema anterior, com um vector cíclico normalizado à unidade. Ora,

$$\| a \|^2 = f(a^*a) = \langle \pi^a(a^*a)\xi, \xi \rangle = \langle \pi^a(a)\xi, \pi^a(a)\xi \rangle = \| \pi^a(a)\xi \|^2 \leq \| \pi^a(a) \|^2 \| \xi \|^2 \leq \| a \|^2 \quad (6)$$

, porque $\| \xi \| = 1$ e porque π^a é contínua. Logo, $\| a \| = \| \pi^a(a) \|$ e como tal, para cada $a \in \mathbb{A}$, temos que π^a é uma isometria. Denote-se por H_a o espaço de Hilbert associado à representação π^a, construído como no teorema anterior, por completude de um espaço quociente. Defina-se o espaço de Hilbert $H = \bigoplus_{a \in \mathbb{A}} H_a$ e a aplicação $\pi : \mathbb{A} \to L(H)$, tal que $\pi(x) = \bigoplus_{a \in \mathbb{A}} \pi^a(x)$. Construímos assim uma representação isométrica (cada π^a é isométrica) de $\mathbb{A}$ no espaço de Hilbert H. ■

Corolário 34 *Se $\mathbb{A}$ é uma C^*-álgebra separável, existe uma representação isométrica de $\mathbb{A}$ num espaço de Hilbert H separável.*

[12] Dado um espaço métrico X, diz-se que Y é a sua completude se Y fôr completo e existir uma isometria $i : X \to Y$ tal que $\overline{i(X)} = Y$. Dado um espaço métrico arbitrário, **existe** sempre a sua completude.

[13] Ora, $\pi(x) : H \to H$. Dado $y \in H$, por definição de H - ver *footnote* 12 - $\exists x_n \in X/Z$ tal que $i(x_n) \to y$. Então, defina-se $\pi(x)(y) = \lim i(\pi_x(x_n))$. Como π_x e i são contínuas, $\pi(x)$ é contínua e é um prolongamento de π_x. A unicidade segue da unicidade da aplicação i.

Prova: Como $\mathbb{A}$ é separável, existe um subconjunto $D = \{d_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{A}$ denso e contável. Para cada $d \in D$, existe uma representação cíclica $\pi^d : \mathbb{A} \to L(H_d)$, como vimos nos resultados anteriores. Sejam $\xi_i \in H_{d_i}$ os respectivos vectores cíclicos. Note-se agora que $\{\pi^{d_i}(d_j)\xi_i : j \in \mathbb{N}\}$ é um subespaço contável e denso (*porque como π é contínua, temos que $\pi(\overline{D}) = \overline{\pi(D)}$ e além disso, $\overline{D} = \mathbb{A}$ e ξ é um vector cíclico*) e como tal, H_{d_i} é separável. Considere-se $\pi : \mathbb{A} \to L(H)$, com $H = \bigoplus_{d\in D} H_d$, tal que $\pi(x) = \bigoplus_{d\in D} \pi^d(x)$. É imediato que H é separável [14]. Além disso, π é isométrica, pois já sabemos de resultados anteriores que $||\pi(d)|| = ||d||$, para todo $d \in D$ e o resultado segue porque D é denso e π é contínua.[15] ■

5 Álgebras de Banach sem representações isométricas

O Teorema de Gelfand-Naimark, garante-nos a existência de uma representação isométrica entre uma C*-álgebra $\mathbb{A}$ e um espaço de Hilbert H. Por outro lado, dada uma álgebra $\mathbb{A}$ de Banach com identidade, existe um homomorfismo isométrico entre $\mathbb{A}$ e $L(\mathbb{A})$[16]. Será então possível flexibilizar o Teorema de Gelfand-Naimark, isto é, será o teorema ainda válido para álgebras menos *exigentes*, como por exemplo álgebras de Banach? A resposta é negativa e neste capítulo são expostos dois exemplos de álgebras de Banach para os quais não existe uma representação isométrica num espaço de Hilbert. O primeiro exemplo é o caso de $L^1(G)$, com G um grupo localmente compacto e infinito. O segundo exemplo é um caso particular de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, nomeadamente com $n = 2$, embora o argumento se possa generalizar para qualquer n.

5.1 O Primeiro Exemplo

Definição 35 *(**Grupo Topológico**) Um grupo topológico G é um espaço topológico munido com uma estrutura de grupo, tal que as operações $G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy$ (*com $G \times G$ na

[14]Lembrar que o produto contável de espaços separáveis é ainda separável. Na verdade, pelo Teorema de Marczewski, dado um cardinal κ infinito e uma família $\{X_i\}_{i\in I}$, com $|I| \leq 2^\kappa$ tal que para todo $i \in I$ existe um subconjunto $D_i \subset X_i$ denso com $|D_i| \leq \kappa$, temos que $\prod_{i\in I}(X_i)$ tem um subconjunto denso com cardinal menor ou igual a κ.

[15]Como D é denso, dado $x \in \mathbb{A}$ existe sucessão $d_n \to x$ com $d_n \in D$. Assim, $||\pi(x)|| = ||\pi(\lim d_n)|| = ||\lim d_n|| = ||x||$.

[16]Basta tomar $\pi : \mathbb{A} \to L(\mathbb{A})$ tal que $\pi_x(a) = xa$. É muito simples verificar que π é um homomorfismo de álgebras, isto é, que $\pi_{x+y}(a) = \pi_x(a) + \pi_y(a)$ e que $\pi_{xy}(a) = (\pi_x\pi_y)(a)$. Além disso, $||\pi_x(a)|| = ||xa|| \leq ||x||||a||$ e como tal, $||\pi_x|| \leq ||x||$. Por fim, tomando $a = 1$, segue que $||\pi_x|| = ||x||$.

topologia produto*) e* $G \to G : x \mapsto x^{-1}$*, são contínuas. Diz-se que o grupo* G *é* localmente compacto *se assim o fôr enquanto espaço topológico.*

Teorema 36 *Seja* G *um grupo localmente compacto. Então existe uma medida de Borel, positiva e regular*[17] *tal que :*

1. $m(U) > 0$ *para qualquer aberto* $U \subset G$ *não vazio*
2. $m(E) = m(xE) = m(Ex) = m(E^{-1})$

Diz-se que m *é uma* ***medida de Haar****. Se não exigirmos que* $m(E) = m(Ex)$ *em (3), diz-se que* m *é uma medida de Haar à esquerda. Se, por outro lado, não exigirmos em (3) que* $m(E) = m(xE)$*, diz-se que* m *é uma medida de Haar à direita. Notamos que se* G *é um grupo compacto, na verdade a medida é mesmo finita e como tal, podemos normalizar* m*, tal que* $m(G) = 1$*.*

Prova: O leitor interessado deve consultar o capítulo 7.9 de [1]. ■

Apartir da medida de Haar, define-se uma operação de convolução em $C_C(G)$, o espaço das funções complexas contínuas e de suporte compacto em G. Sendo $f, g \in C_C(G)$, para $t \in G$ define-se $(f \star g)(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s)$.
Além disso, podemos definir ainda uma involução em $C_C(G)$. No entanto, é conveniente definir primeiro uma função $\Delta : G \to \mathbb{R}$ à qual se chama *função modular*: dada uma medida μ de Haar à direita, define-se que $\mu(g^{-1}E) = \Delta(g)\mu(E)$, para qualquer E que seja um conjunto de Borel. Podemos agora definir uma involução em $C_C(G)$ do seguinte modo : $f^*(s) = \overline{f(s^{-1})}\Delta(s^{-1})$. Por fim, podemos ainda definir uma norma em $C_C(G)$, $||f||_1 = \int_G |f(s)|d\mu(s)$. Assim, $C_C(G)$ é uma álgebra normada com involução.

O próximo passo é definir uma relação de equivalência muito útil. Dizemos que f, g, funções complexas em G, são equivalentes se e só se diferem num conjunto nulo em relação à medida de Haar. Assim, designamos por $L^1(G)$ o espaço das funções somáveis (*em relação à medida de Haar*) com a relação de equivalência descrita. É uma construção perfeitamente análoga aos espaços L^p, no entanto em vez de se usar a medida de Lebesgue, usa-se a medida de Haar.

Teorema 37 *Seja* G *um grupo localmente compacto. Então,* $L^1(G)$ *com o produto de convolução, com a involução e com a norma supra descritas, é uma álgebra de Banach com involução.*

[17] Recorde-se que uma medida m diz-se regular se $m(E) = \inf \{m(U) : E \subset U, U aberto\}$.

Prova: O leitor interessado deve consultar [2]. ■

O próximo conceito que é necessário para formular o nosso primeiro exemplo, é o conceito de **regularidade de Arens**.

A ideia passa por, dada uma álgebra de Banach $\mathbb{A}$, definir duas operações no bidual $\mathbb{A}^{**}$ que extendem a multiplicação em $\mathbb{A}$. Se estas duas operações no bidual coincidirem, diz-se que $\mathbb{A}$ é *Arens regular*. A primeira operação, $\circ_1$, é definida do seguinte modo : sejam $x, y \in \mathbb{A}$, $f \in \mathbb{A}^*$ e $F, G \in \mathbb{A}^{**}$. Então, temos que $(f \circ x)(y) = f(xy)$, $(G \circ f)(x) = G(f \circ x)$ e $(F \circ_1 G)(f) = F(G \circ f)$. A segunda operação, $\circ_2$, obedece às relações : $(x \circ f)(y) = f(yx)$, $(f \circ F)(x) = F(x \circ f)$ e $(F \circ_2 G)(f) = G(f \circ F)$.

Teorema 38 *Seja $\mathbb{A}$ uma C^*-álgebra. Então, $\mathbb{A}$ é Arens regular.*

Prova: O leitor interessado deve consultar [3]. ■

Lema 39 *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach e M uma subálgebra fechada de $\mathbb{A}$. Se $\mathbb{A}$ é Arens regular, então M também é.*

Prova: O leitor interessado deve consultar [4]. ■

Teorema 40 *Seja G um grupo localmente compacto e infinito. Então, $L^1(G)$ não é Arens Regular.*

Prova: O leitor interessado deve consultar [5]. ■

Estamos finalmente em condições para apresentar o nosso primeiro exemplo :

Teorema 41 *Seja G um grupo localmente compacto e infinito. Então, não pode existir uma representação isométrica de $L^1(G)$ num espaço de Hilbert H.*

Prova: Suponha-se, por contradição, que existe uma representação isométrica $\pi : L^1(G) \to L(H)$. Como $L^1(G)$ é Banach, então $\pi(L^1(G))$ é ainda Banach e como tal um subespaço fechado de $L(H)$. Note-se que $L(H)$ é uma C*-álgebra e como tal, pelo Teorema 38, é Arens regular. Assim, pelo Lema 39, $\pi(L^1(G))$ é Arens regular. Mas isto é impossível, pois deste modo $L^1(G)$ é Arens regular, o que contraria o Lema 40. ■

5.2 O Segundo Exemplo

Para compreender o nosso segundo exemplo, basta recordarmos factos elementares sobre espaços de Hilbert : Recorde-se que dado $P \in L(H)$ que seja idempotente (i.e. $P^2 = P$), é equivalente dizer que P é uma projeção ortogonal, que tem norma $||P|| = 1$ ou que é auto-adjunto. Recorde-se ainda que dadas duas projeções $P_1, P_2 \in L(H)$ tais que $P_1P_2 = 0$ e que $1 = P_1 + P_2$, definindo $K = \Im(P_1)$ e $L = \Im(P_2)$, temos que $H = K \bigoplus L$. Por fim, é conveniente designar que P_1 e P_2 são *equivalentes* quando existem $u, v \in L(H)$ tais que $uv = P_1$ e $vu = P_2$. Neste caso, não é difícil verificar que K e L são isométricos.

Teorema 42 *Seja $\mathbb{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, com a norma do operador induzida por l^p, com $1 \leq p \leq \infty$, mas $p \neq 2$ em $\mathbb{C}^2$. Então, $\mathbb{A}$ é uma álgebra de Banach que não pode ter representações em espaços de Hilbert H.*

Prova: Vamos provar que se existisse uma representação, a norma em $\mathbb{A}$ era induzida necessariamente por l^2, o que contraria a hipótese. Suponha-se então que existe uma representação $\pi : \mathbb{A} \to L(H)$, para algum espaço de Hilbert H. Note-se que $\pi(e_1)$ e que $\pi(e_2)$ são projeções (uma vez que são elementos de $L(H)$ idempotentes e com norma unitária) tais que $\pi(e_1)\pi(e_2) = \pi(e_1e_2) = 0$. Além disso, note-se que podemos supôr sem perda de generalidade que $\pi(e_1) + \pi(e_2) = 1$. Assim, temos que se $K = \Im(\pi(e_1))$ e $L = \Im(\pi(e_2))$, então $H = K \bigoplus L$. Além disso, note-se que $e_1 = e_{12}e_{21}$ e que $e_2 = e_{21}e_{12}$ e assim sendo, $\pi(e_1)$ e $\pi(e_2)$ são equivalentes[18]. Como consequência, K e L são isométricos e portanto, $L(H)$ é isomorfo a $\mathbb{M}_2(L(K)) = \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \otimes L(K)$. Assim, $\pi : x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a1_K & b1_K \\ c1_K & d1_K \end{pmatrix} = x \otimes 1_K$. Logo, $||x||^2 = ||\pi(x)||^2 = ||x \otimes 1_K|| = ||x^*x||$, onde a última igualdade advém do facto de $\pi(x)$ ser um elemento de uma C*-álgebra. Mas, $||x^*x|| = \rho(x^*x)$ é, a norma é induzida por l^2, o que é uma contradição.[19] ■

Referências

[1] *A Course in Functional Analysis*, Conway, J.B. (1990), Graduate Texts in Mathematics, Springer

[2] *Introduction to Operator Algebras*, Li, B.R. (1992), World Scientific Publishing Co

[3] *The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra*, P.Civin , B.Yood (1961), Pacific J.Math. 11 , 847-870

[18] Onde e_i é a matriz apenas com a entrada a_{ii} distinta de zero (e igual a um). Por outro lado, e_{ij} denota a matriz com a entrada $a_{ij} = 1$ e as restantes entradas iguais a zero.

[19] Onde $\rho(A) = \max |\lambda_i|$, com λ_i os valores próprios de A, é o chamado raio espectral da matriz A.

[4] *The second conjugate algebras of Banach algebras*, Pak-Ken Wong (1994), J.Math. and Math.Sci. VOL.17 NO.1

[5] *Banach Algebras and the general theory of *-algebras*, Palmer T.W. (1994), Vol 49 of Encycl. Math. Appl., Cambridge University Press

[6] *Uma Introdução às C^*-álgebras*, Ruy Exel

[7] *C^*-Algebras and their automorphism groups*, G.K.Pedersen (1972), Acad. Press

[8] *Functional Analysis - Spectral Theory*, V.S. Sunder (1998), Birkhäuser Verlag