UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CORRESPONDÊNCIA DE GALOIS NÃO-COMUTATIVA

Eduardo Carrilho Jordão do Rosário Monteiro

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática e Aplicações

JÚRI

Presidente:

Doutor Miguel Tribolet de Abreu

Orientador:

Doutor Paulo Jorge da Rocha Pinto

Vogais:

Doutor Carlos Correia Ramos

Doutor Nuno Miguel Matos Ramos Martins

Maio 2008

Agradecimentos

Um trabalho desta envergadura nunca veria a luz do dia sem o contributo de muita gente, especialmente pelas pesadas limitações impostas pelo meu exercício, a tempo inteiro, de funcionário dos impostos. Neste capítulo não quero esquecer o apoio de muitos colegas dos impostos nesta minha perigrinação pelo estudo de algo que terá apenas a natureza de *hobby* nesta profissão singela. Destaco aqui o papel do meu primeiro Chefe de Finanças na vivência deste *hobby*, Dr. Jaime Francisco Teles Matias. Nunca teria conseguido terminar as minhas Licenciaturas e enveredar pela conquista da titularidade de Mestre sem um exercício pleno da condição de Trabalhador-Estudante.

Ao meu Pai devo a génese deste bichinho que é a vontade de estudar. Mas nada disto seria possível sem o apoio, esforço e sacrifício do tempo da minha mulher e dos meus filhos. **Ao meu Pai, à Sónia, ao Afonso e ao Vicente dedico este trabalho**.

Ao Dr. Pedro Jorge Videira Mendes, colega de Licenciatura, na Licenciatura em Matemática pela FCUL, devo a disponibilidade do seu tempo para a resolução dos muitos problemas técnicos que encontrei na edição do texto em TeX, e o acesso aos arquivos da Universidade de Barcelona. Daí vieram os principais artigos de que fiz uso. A ele o meu muito sentido obrigado.

Ao meu orientador, Prof. Paulo Jorge da Rocha Pinto, devo a paciência para tolerar a minha falta de tempo e as constantes quebras de compromisso, pelas muitas solicitações profissionais e familiares. Sem ele este trabalho nunca seria uma REALIDADE. Acreditou sempre em mim, estoicamente e com dedicação, mesmo quando eu já duvidava das minhas próprias capacidades.

Ao Prof. José de Sousa Ramos devo tudo: a inteligência de perceber as minhas reais necessidades académicas e orientar o meu percurso no IST. Quando lhe pedi que orientasse a minha Tese de Mestrado escolheu o Prof. Paulo Pinto e explicou: «*... é um especialista [...] e tens muita Matemática a aprender com ele ...*». Pela disponibilidade que sempre demonstrou talvez adivinhasse o que só descobrimos no dia 1 de Janeiro de 2007. Não me deixou orfão e ofereceu-me um legado bastante acima do que eu alguma vez poderia ou poderei imaginar. À sua memória dedico todo o meu tributo científico. É muito pouco, mas podemos juntá-lo ao de muitos que tiveram a honra de ser orientados por ele.

Resumo

Utilizamos a abordagem das álgebras de operadores para desenvolver a teoria de Galois, onde corpos e subcorpos são substituídos por factores M e subfactores $N \subseteq M$, respectivamente.

O factor hiperfinito R, do tipo II_1, tem uma estrutura de simetria bastante rica (e.g., um qualquer grupo finito actua externamente sobre R e um subfactor $N \subseteq R$ permanece hiperfinito; a álgebra N é isomorfa a R, se infinito-dimensional, por aplicação de importantes resultados de von Neumann e A. Connes). V.R.F. Jones iniciou o estudo dos subfactores $N \subseteq M$ e procurou invariantes que permitissem distinguir diferentes inclusões a menos dum isomorfismo de álgebras: encontrou o índice (de Jones) $[M : N]$ e o grupo de Galois $Gal\,(M, N)$.

Revemos a construção duma acção externa dum qualquer grupo finito G sobre R; deduzimos algumas propriedades gerais do grupo de Galois, e verificamos que $|Gal\,(M, N)| \leq [M : N]$; calculamos explicitamente os grupos de Galois $Gal\left(R, R^G\right)$ e $Gal\,(R \rtimes_\alpha G, R)$, dos subfactores $R^G \subseteq R$ e $R \subseteq R \rtimes_\alpha G$, respectivamente, onde R^G é a álgebra dos pontos fixos, $R \rtimes_\alpha G$ é a álgebra produto cruzado e $\alpha : G \to Aut(R)$ é a subjacente acção externa de G sobre R. Além disso, obtemos a correspondência de Galois entre sub-grupos de G e sub-álgebras intermédias $R \subseteq P \subseteq R \rtimes_\alpha G$ ou $R^G \subseteq Q \subset R$. Provamos que os subfactores $R^G \subseteq R^H$ e $R^{G/H} \subseteq R$ são conjugados quando H é um subgrupo normal de G, obtendo-se uma correspondência de Galois entre uma classe mais vasta de subfactores e o grupo de Galois.

Palavras Chave

- Álgebras de von Neumann
- Factores do tipo II_1
- Índice de Jones
- Subfactores
- Grupo de Galois
- Correspondência de Galois

Abstract

We use the operator algebras framework to develop Galois theory, where fields and subfields are replaced by factors M and subfactors $N \subseteq M$, respectively.

The type II_1 hyperfinite factor R has a very rich symmetry structure (e.g., any finite group acts outerly on R and a subfactor $N \subseteq R$ is still hyperfinite, hence the algebra N is isomorphic to R, if infinite dimensional, using deep results of von Neumann and A. Connes). V.R.F. Jones started the study of subfactors $N \subseteq M$ and looked for invariants that could distinguish different inclusions rather than the isomorphism class of the algebras, the first is now so-called Jones index $[M : N]$ and the next one is the Galois group.

We review the construction of an outer action of any finite group G on R, derive some general properties of the Galois group, where $|Gal\,(M, N)| \leq [M : N]$ holds, and compute explicitly both Galois groups $Gal\,(R, R^G)$ and $Gal\,(R \rtimes_\alpha G, R)$ of the subfactors $R^G \subseteq R$ and $R \subseteq R \rtimes_\alpha G$, respectively, where the fixed point algebra is R^G, the crossed product algebra is $R \rtimes_\alpha G$ and the underlying outer action of G on R is $\alpha : G \to Aut(R)$. Besides, we obtain the Galois correspondence between subgroups of G and intermediate subalgebras $R \subseteq P \subseteq R \rtimes_\alpha G$ or $R^G \subseteq Q \subset R$. Moreover we prove that the subfactors $R^G \subseteq R^H$ and $R^{G/H} \subseteq R$ are conjugated provided H is a normal subgroup of G, thus we obtain a Galois correspondence for a larger class of subfactors and its Galois group.

Keywords

- von Neumann algebras
- Type II_1 factors
- Jones index
- Subfactors
- Galois group
- Galois correspondence

Conteúdo

Abreviaturas

$Ad : \mathcal{U} \times M \to M$
$\quad (u, x) \mapsto uxu^*$
$Ad_u : M \to M$
$\quad x \mapsto uxu^*$, onde u é um operador unitário qualquer
$Ad_u \equiv Ad(u, .)$
$Ad_u(x) \equiv Ad(u, x)$
$Aut(M)$ - grupo dos automorfismos de M
G - grupo finito
$Gal(M, N)$ - **grupo de Galois** para o par $N \subseteq M$
$Gal(M, N) := \{\alpha \in Aut(M) : \alpha|_N = id_N\}$
$Int(M)$ - grupo dos automorfismos internos de M
$Int(M) := \left\{\alpha \in Aut(M) : \forall_{x \in M} \exists_{u \in \mathcal{U}(M)} \left[\alpha\left(x\right) = uxu^*\right]\right\}$
M, N - factores do tipo $\mathbf{II}_1$
$M^\alpha \equiv M^G$
M^G - álgebra dos ponto fixos por G na acção subjacente
N é **sub-álgebra singular** de $M \overset{def}{\iff} \mathcal{N}(M, N) = \mathcal{U}(N)$
$\mathcal{N}(M, N)$ - **normalizador** de N em M.
$\mathcal{N}(M, N) := \{u \in \mathcal{U}(M) : uNu^* = N\}$
$\widetilde{\mathcal{N}}(M, N) := \mathcal{N}(M, N)/\mathcal{U}(N)$
$\mathcal{S}(M, N)$ - **série de Galois** de N para M
$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
tr - traço
$\mathbf{T} = S^1$
$\mathcal{U}(M)$ - grupo dos elementos unitários de M
$\mathcal{U}$ - grupo de unitários simbólicos [eventualmente, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(M)$]

Introdução

O objectivo deste trabalho é o estudo da *Teoria Clássica de Galois* no contexto das álgebras de operadores; é o estudo da Teoria Clássica de Galois no contexto da *Teoria dos Subfactores*. Na Teoria Clássica de Galois estudamos corpos e extensões de corpos; no nosso contexto substituimos os corpos por álgebras de von Neumann; é a extensão da Teoria Clássica de Galois para um contexto não-comutativo com centro trivial. Uma álgebra de von Neumann com centro trivial é o que denominamos por *factor*.

Faz-se um esforço para respeitar o espírito histórico desta aventura. Segue-se de perto as notações e terminologia do clássico de Jacques Dixmier, à semelhança dos construtores desta aventura. A obra aqui utilizada é a tradução para inglês deste clássico (ver [4]), onde se autonomiza, pela primeira vez, o conceito de *álgebra de von Neumann*, até então designada por *anel de operadores* (ver Observação 1.1.23). Por exemplo, apesar de ser prática comum na teoria dos operadores usar $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ para representar o conjunto dos *operadores lineares e limitados* sobre o Hilbert $\mathcal{H}$ (do inglês **B**ounded), usa-se a notação $\mathbf{L}(\mathcal{H})$, à semelhança de Dixmier, que previligia uma etimologia latina à etimologia anglo-saxónica. Segue-se de perto o contributo John von Neumann, da escola Japonesa, de Alain Connes e de Vaughan Jones.

Do estudo de Connes resulta que: sendo $\mathbf{R}$ um factor hiperfinito do tipo **II** e dado $N \subseteq \mathbf{R}$ tal que $dim(N) = \infty$ então $N \simeq \mathbf{R}$. Assim, a identificação desta classe equivale à busca de *invariantes sensíveis à inclusão*: dados dois subfactores $N_1 \subseteq \mathbf{R}$ e $N_2 \subseteq \mathbf{R}$ as inclusões $(N_1 \subseteq \mathbf{R})$ e $(N_2 \subseteq \mathbf{R})$ são conjugadas quando existe um automorfismo $\theta \in Aut(\mathbf{R})$ tal que $\theta(N_1) = N_2$, e escreve-se

$$(N_1 \subseteq \mathbf{R}) \sim (N_2 \subseteq \mathbf{R}) \text{ ou } (N_1 \subseteq \mathbf{R}) \overset{\theta}{\sim} (N_2 \subseteq \mathbf{R}). \tag{1}$$

O índice de Jones $[N : \mathbf{R}]$ da inclusão $(N \subseteq \mathbf{R})$ é um primeiro invariante, que deve corresponder na Teoria Clássica de Galois à *extensão de corpos*. O segundo invariante é o Grupo de Galois, $Gal(\mathbf{R}, N)$, da inclusão $(N \subseteq \mathbf{R})$, que extende naturalmente o *Grupo de Galois* , $\mathrm{Gal}(\mathbf{R} : N)$, *para a extensão de corpos* $\mathbf{R} : N$, quando $\mathbf{R}$ e N são corpos. Neste trabalho estudamos a série de Galois e demonstramos que quando $N \subseteq M$

$$|Gal(M, N)| \leq [M : N]. \tag{2}$$

Também iremos provar propriedades gerais do grupo de Galois e proceder ao cálculo explícito do grupo de Galois das inclusões $\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}\right)$ e $(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$. Quando H é subgrupo normal de G, calculamos o grupo de Galois das inclusões $\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right)$ e $(\mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$, onde a acção externa do grupo finito G sobre $\mathbf{R}$ é dada por $\alpha : G \to Aut(\mathbf{R})$. Além disso, estabelecemos a correspondência de Galois

$$H \leq G \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^G \subseteq Q \subseteq \mathbf{R} \tag{3}$$

entre subgrupos de G e sub-álgebras Q, entre $\mathbf{R}^G$ e $\mathbf{R}$. Estabelecemos também uma correspondência de Galois

$$H \leq G \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R} \subseteq P \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G \tag{4}$$

entre subgrupos de G e sub-álgebras P, onde P é o produto cruzado $\mathbf{R} \rtimes_\alpha H$. Também se prova o resultado

$$Gal(\mathbf{R} \rtimes G, \mathbf{R}) \simeq G/[G,G], \qquad Gal(\mathbf{R}, \mathbf{R}^G) \simeq G \tag{5}$$

onde $[G,G]$ designa o comutador de G. Provamos também que, sempre que H é subgrupo normal de G (denotado $H \trianglelefteq G$) o subfactor $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H$ é conjugado do subfactor $\mathbf{R}^{G/H} \subseteq \mathbf{R}$, a saber

$$\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right) \overset{\varphi}{\sim} \left(\mathbf{R}^{G/H} \subseteq \mathbf{R}\right), \tag{6}$$

e o subfactor $\mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G$ é conjugado do subfactor $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha (G/H)$, a saber

$$(\mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G) \overset{\psi}{\sim} (\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha (G/H)). \tag{7}$$

Assim, generalizamos para a correspondência de Galois

$$\widetilde{H} \leq G/H \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^G \subseteq Q \subseteq \mathbf{R}^H \tag{8}$$

entre subgrupos de G/H e sub-álgebras $Q = \varphi^{-1}\left(\mathbf{R}^{\widetilde{H}}\right)$, a correspondência de Galois para a álgebra dos pontos fixos obtida em (3), a menos da conjugação φ; ou generalizamos para a correspondência de Galois

$$\widetilde{H} \leq G/H \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq P \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G \tag{9}$$

entre os subgrupos de G/H e sub-álgebras $P = \psi^{-1}\left(\mathbf{R} \rtimes_\alpha \widetilde{H}\right)$ a correspondência de Galois para o produto cruzado obtida em (4), a menos da conjugação ψ.

O plano do remanescente da tese é como se segue.

O Capítulo 1 tem três Secções. A primeira Secção é o percurso que vai das álgebras de operadores às álgebras de von Neumann. A segunda Secção é um refinamento da primeira Secção, sendo de realçar o *Teorema da densidade do bicomutante* (Teorema 1.2.29) e o conceito de *álgebra hiperfinita* (Definição 1.2.33). Na terceira Secção dedicamo-nos a esquematizar alguns aspectos da Teoria e a dar exemplos concretos dos vários factores possíveis. O conceito mais importante aí discutido é o de *factor* (Definição 1.3.5). Procede-se também à uma classificação dos factores ao estilo de von Neumann, que juntamente com Murray apresentou a primeira classificação dos factores.

O Capítulo 2 desenvolve os instrumentos para a Teoria de Galois não-comutativa. Os conceitos mais importantes aí discutidos são *acção externa* (Definição 2.1.12) e *produto cruzado* (Definição 2.2.3). Na Secção 2.3 procede-se à construção do factor hiperfinito do tipo $\mathbf{II}_1$, denotado $\mathbf{R}$ (ver Teorema 2.3.2). Na Secção 2.4 dado um grupo finito G constroi-se uma acção externa de G sobre $\mathbf{R}$. Estas duas Secções são essenciais para o

Capítulo 3, uma vez que fica garantida a existência de uma acção externa de qualquer grupo finito sobre **R**.

O Capítulo 3 é o capítulo onde provamos os resultados fundamentais deste trabalho. Bem poderia designar-se de *capítulo dos invariantes*. São discutidos os seguintes invariantes de conjugação de subfactores: o *índice de Jones* (ver Definição 3.3.4), o *grupo de Galois* (ver Definição 3.3.6) e a *série de Galois* (ver Definição 3.4.2). Apresentamos e demostramos a desigualdade (2) (ver Teorema 3.4.8) que é fundamental por relacionar os dois invariantes em estudo e estabecer uma cisão com a teoria clássica, onde estes invariantes têm um papel diferenciador equivalente. O conceito de *conjugação* quando aplicado a subgrupos normais é um instrumento fundamental. Fica aqui ilustrado este facto, sendo que as demonstrações aqui apresentadas são mais simples que as existentes na bibliografia de suporte (ver Teorema 3.2.4). Os resultados ilustrados em (5) estão enquadrados neste Capítulo, e permitem-nos determinanar os grupos de Galois, tanto para o caso das álgebras dos pontos fixos bem como no caso de álgebras resultantes do produto cruzado (ver Teoremas 3.6.1 e 3.6.3). Na Secção 3.5 analisamos a Teoria de Galois para factores do tipo **I** e verifica-se, por exemplo, que o Grupo de Galois é infinito. Ilustramos, por exemplos, que a correspondência de Galois não é válida para factores do tipo **I** (ver os Exemplos 3.5.5, 3.5.6 e a Observação 3.5.2). É mais uma achega para a importância deste estudo no âmbito dos factores do tipo **II**, como nas Secções seguintes. Na Secção 3.6 determinamos explicitamente os grupos de Galois dos subfactores $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}$ e $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes G$. Generalizamos nesta mesma Secção, como corolário do Teorema 3.2.4, o cálculo dos grupos de Galois para as inclusões $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H$ e $\mathbf{R} \rtimes H \subseteq \mathbf{R} \rtimes G$, com H subgrupo normal de G. Na Secção 3.7 provamos que a correspondência de Galois verifica-se para factores do tipo **II**. Nomeadamente, estabelecem-se as correspondências de Galois ilustradas nos pontos (3), (4), (8) e (9) (Teoremas 3.7.1, 3.7.2, 3.7.3, 3.7.4, respectivamente).

O Apêndice discorre sobre os preliminares à Teoria aqui desenvolvida. Depois de definirmos algumas *noções base* numa primeira Secção, na segunda Secção fazemos uma incursão pelas topologias envolvidas numa álgebra de operadores. As topologias são absolutamente cruciais para a compreensão das álgebras de operadores. Pretende−se dar aqui uma ideia concreta de como construir uma topologia para uma álgebra de operadores. Pretende-se que esta secção funcione como uma espécie de dicionário elementar das topologias numa álgebra de operadores. Por exemplo, a aplicação do Teorema do Bicomutante (Teorema 1.2.30) faz-nos pensar que numa álgebra de von Neumann todas as topologias mais finas do que a *topologia da norma do operador* são equivalentes. Mas até para as álgebras de von Neumann faz sentido diferenciar as topologias: apenas as topologias $*$ são contínuas para as operações de involução (ver as Definições A.2.3, A.2.5, A.2.8 e A.2.10). A terceira Secção é um simples resumo da Teoria de Galois Clássica.

Capítulo 1

Álgebras de von Neumann

1.1 Álgebras de Operadores

Referências: [1, 3, 4, 5, 15, 31, 35]

A teoria das álgebras de operadores desenvolveu-se da década de 1930 por Murray e von Neumann, trabalhando fundamentalmente com álgebras fechadas para a topologia fraca.

Definição 1.1.1. *Uma álgebra de operadores diz-se **álgebra abstracta** quando a sua caracterização não faz qualquer referência a um espaço Hilbert sobre o qual a álgebra actua. Quando existe uma referência a um espaço Hilbert sobre o qual a álgebra de operadores actua diz-se que estamos em presença de uma **álgebra concreta**.*

Definição 1.1.2. ***Álgebra de Banach** é toda a álgebra em que o espaço vectorial subjacente é um espaço Banach.*

Definição 1.1.3. *Seja $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, +, \cdot\} \cup \mathbb{C})$ uma álgebra com escalares complexos. Uma **involução** é uma operação unária $x \longmapsto x^*$, satisfazendo:*
a) $(x^*)^* = x$, com $x \in \mathbf{A}$;
b) $(x+y)^* = x^* + y^*$, com $x, y \in \mathbf{A}$;
c) $(\lambda.x)^* = \overline{\lambda}.x^*$, com $\lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbf{A}$;
d) $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$, com $x, y \in \mathbf{A}$.

Definição 1.1.4. ***Álgebra-$*$** é toda a álgebra com escalares complexos, $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, +, \cdot, *\} \cup \mathbb{C})$, onde está definida uma involução $*$ tal que $x^* \in \mathbf{A}$ sempre que $x \in \mathbf{A}$.*

≪álgebra-$*$≫ lê-se *álgebra estrela*.

Definição 1.1.5. ***Álgebra-B*** é toda a álgebra-$*$ que seja álgebra Banach com identidade, $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot, *, \|\cdot\|\} \cup \mathbb{C})$.*

Teorema 1.1.6. *Seja $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot, *, \|\cdot\|\} \cup \mathbb{C})$ uma Álgebra-B*. Então, para cada $x \in \mathbf{A}$ temos que $\|x^*\| = \|x\|$.*

Demonstração. SPG admita-se que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{L}(H)$, com H Hilbert, e seja $x \in \mathbf{A}$. Então,

$$\begin{aligned}
||x^*|| &= \sup_{|\xi|=1}\{|x^*(\xi)| : \xi \in H\} = \sup_{|\xi|=1}\{| < x^*\xi, \xi > | : \xi \in H\} \\
&= \sup_{|\xi|=1}\{| < \xi, x\xi > | : \xi \in H\} = \sup_{|\xi|=1}\{|\overline{< x\xi, \xi >}| : \xi \in H\} \\
&= \sup_{|\xi|=1}\{| < x\xi, \xi > | : \xi \in H\} \\
&= ||x||
\end{aligned}$$

□

Definição 1.1.7. ***Álgebra-C**** *é uma álgebra-B**, $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot, *, \|\cdot\|\} \cup \mathbb{C})$, *tal que para cada* $x \in \mathbf{A}$ *temos que* $\|x^* \cdot x\| = \|x\|^2$.

Observação 1.1.8. *Uma álgebra-C** *é uma álgebra de operadores. Os axiomas para uma* ***álgebra-C**** ***abstracta*** *foram estabelecidos em 1943 por Gelfand e Naimark. Com a ajuda de um axioma extra* ($\sigma(x^* \cdot x) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, *para todo o* x) *Gelfand e Naimark conseguiram provar que uma qualquer álgebra-C** *é isomorfa a uma álgebra de operadores sobre um espaço Hilbert. A designação álgebra-C** *é notação de* ***Segal****. Presume-se que o C titula o facto de uma álgebra-C** *ser o análogo não-comutativo de* $C_0(\Omega)$, *conjunto das funções complexas contínuas sobre o espaço localmente compacto* Ω. *O* $*$ *lembra a importância da involução.*

Definição 1.1.9. *Seja* $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \cdot\} \cup \mathbb{C})$ *uma álgebra-*$*$ *de operadores com identidade. Dados* $x \in \mathbf{A}$ *e* f, *funcional linear de* $\mathbf{A}$, *temos que:*

- x^* *é o* ***operador adjunto*** *de* x;
- x *é* ***operador auto-adjunto*** *se* $x^* = x$;
- x *é* ***operador normal*** *se* $x^* \cdot x = x \cdot x^*$;
- x *é* ***operador unitário*** *se* $x^* \cdot x = x \cdot x^* = 1$;
- x *é* ***operador positivo*** *se é auto-adjunto,* $x^* = x$, *e o seu espectro,* $\sigma(x)$, *é tal que*

  $$\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}^+.$$

  O conjunto dos operadores positivos da álgebra denota-se por A^+;
- f *é um* ***funcional linear positivo*** *se* $x \in A^+ \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^+$;
- f *é um* ***estado*** *se* f *for um funcional linear positivo tal que* $f(\mathbf{1}) = 1$;
- f *é um* ***estado puro*** *se* f *for um elemento extremal do conjunto de estados da álgebra;*
- f *é um* ***funcional linear hermítico*** *se* $f(x^*) = \overline{f(x)}$.

Definição 1.1.10. $\mathbf{L}(H)^{\#}$ *é o conjunto dos operadores auto-adjuntos de* $\mathbf{L}(H)$.

Definição 1.1.11. $\mathbf{L}(H)^+$ *é o conjunto dos operadores positivos de* $\mathbf{L}(H)$.

Definição 1.1.12. *A* ***relação de ordem em*** $\mathbf{L}(H)^\#$ *será denotada por* $\leq$. *Dados* $x, y \in \mathbf{L}(H)^\#$ *escrevemos* $x \leq y$ *se* $y - x$ *é um operador positivo e* $x \geq y$ *significa que* $y \leq x$.

Definição 1.1.13. *Sejam* $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \cdot\} \cup \mathbb{C})$ *e* $(\mathbf{B}, \{\widehat{\mathbf{0}}, \widehat{\mathbf{1}}, \widehat{*}, \widehat{+}, \widehat{\cdot}\} \cup \mathbb{C})$ *duas álgebras-$*$ de operadores com identidade. Um* ***homomorfismo-$*$*** *é um homomorfismo de aneis,* $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, *que respeita a operação estrela, i.e., dados* $a, b \in \mathbf{A}$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$ *temos:*

a) $\varphi(\mathbf{0}) = \widehat{\mathbf{0}}$;
b) $\varphi(\mathbf{1}) = \widehat{\mathbf{1}}$;
c) $\varphi(a^*) = \varphi(a)^{\widehat{*}}$;
d) $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$;
e) $\varphi(a + b) = \varphi(a) \widehat{+} \varphi(b)$;
f) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \widehat{\cdot} \varphi(b)$.

Um ***isomorfismo-$*$*** *é um isomorfismo que é homomorfismo-$*$.*

Definição 1.1.14. ***Representação de uma álgebra-C****, $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \cdot\} \cup \mathbb{C})$, *é todo o par ordenado* (φ, H), *onde* H *é um espaço Hilbert complexo e* $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{L}(H)$ *é um $*-$homomorfismo. A representação* (φ, H) *é uma* ***representação fiel*** *se* φ *for um isomorfismo-$*$. A representação* (φ, H) *é uma* ***representação cíclica*** *se existe* $\xi \in H$ *tal que*

$$\overline{\varphi(\mathbf{A})\xi} = \overline{\{\varphi(a)\xi : \ a \in \mathbf{A}\}} = H.$$

Um vector $\xi \in H$ *tal que* (φ, H) *é uma representação cíclica de* $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \cdot\} \cup \mathbb{C})$ *diz-se um* ***vector cíclico*** *para* φ, *ou* ***vector gerador***. *Dadas uma representação* (φ, H) *de* $\mathbf{A}$ *e um versor* u *de* H, *denotamos por* ω_u *o correspondente estado de* $\mathbf{L}(H)$. *Nestas circunstâncias,* $e = \omega_u \circ \varphi$ *é um estado de* $\mathbf{A}$.

Teorema 1.1.15. [**Produto interno num espaço vectorial quociente**] *Sejam* $\mathbf{A}$ *uma álgebra$-C^*$ e* θ *um estado da álgebra. Então, o conjunto* $\mathbf{I}_\theta = \{x \in \mathbf{A} : \theta(x^* \cdot x) = 0\}$ *é um ideal esquerdo fechado em* $\mathbf{A}$, $\theta(y^* \cdot x) = 0$, *quando* $x \in \mathbf{I}_\theta$, $y \in \mathbf{A}$ *e a equação*

$$\langle x + \mathbf{I}_\theta, y + \mathbf{I}_\theta \rangle = \theta(y^* \cdot x) \qquad (x, y \in \mathbf{A})$$

define um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *no espaço vectorial quociente* $\mathbf{A}/\mathbf{I}_\theta$.

Demonstração. Como θ é positivo (e logo hermítico) podemos definir um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ sobre $\mathbf{A}$ por

$$\langle x, y \rangle_0 = \theta\,(y^* \cdot x) \qquad (x, y \in \mathbf{A})$$

e definir

$$\mathbf{I}_\theta = \{x \in \mathbf{A} : \langle x, x \rangle_0 = 0\}\,.$$

Ora, $\mathbf{I}_\theta$ é um subespaço vectorial de $\mathbf{A}$, e a equação

$$\langle x + \mathbf{I}_\theta, y + \mathbf{I}_\theta \rangle = \langle x, y \rangle_0 = \theta(y^* \cdot x)$$

define um produto interno sobre $\mathbf{A}/\mathbf{I}_\theta$. Se $x \in \mathbf{I}_\theta$ e $y \in \mathbf{A}$,

$$|\theta\,(y^*\cdot x)|^2 \leq \theta\,(y^*\cdot y)\,\theta\,(x^*\cdot x) = 0,$$

pelo que $\theta\,(y^*\cdot x) = 0$. Substituindo y por $y^*\cdot y\cdot x$ segue-se que

$$\theta\left((y\cdot x)^* \cdot (y\cdot x)\right) = \theta\left((y^*\cdot y\cdot x)^* \cdot x\right) = 0, \qquad y\cdot x \in \mathbf{I}_\theta,$$

sempre que $x \in \mathbf{I}_\theta$ e $y \in \mathbf{A}$. Assim, $\mathbf{I}_\theta$ é o ideal esquerdo de $\mathbf{A}$, e é fechado, pois θ é contínuo.

□

Teorema 1.1.16. [**Construção de Gelfand − Naimark − Segal**] *Sejam* $\mathbf{A}$ *uma álgebra*$-C^*$ *e* θ *um estado da álgebra. Então, existem uma representação cíclica,* $(\varphi_\theta, \mathbf{A})$, *de* $\mathbf{A}$ *sobre o espaço Hilbert* $\mathbf{H}_\theta$ *e um vector cíclico de* φ_θ, x_θ, *tais que* $\theta = \omega_{x_\theta} \circ \varphi_\theta$, *i.e.,*

$$\theta(L) = \langle \varphi_\theta(L)x_\theta, x_\theta\rangle \qquad (L \in \mathbf{A}).$$

Demonstração. Sendo $\mathbf{I}_\theta$ o núcleo esquerdo de θ, o espaço vectorial quociente $\mathbf{A}/\mathbf{I}_\theta$ é um espaço pré-Hilbert, pelo produto interno definido, como no teorema anterior, por

$$\langle L + \mathbf{I}_\theta, M + \mathbf{I}_\theta\rangle = \theta(M^*\cdot L) \qquad (L, M \in \mathbf{A}).$$

A completação respectiva é um espaço Hilbert $\mathbf{H}_\theta$. Se $L, M_1, M_2 \in \mathbf{A}$ e $M_1 + \mathbf{I}_\theta = M_2 + \mathbf{I}_\theta$, então $M_1 - M_2 \in \mathbf{I}_\theta$, $L\cdot M_1 - L\cdot M_2 \in \mathbf{I}_\theta$ porque $\mathbf{I}_\theta$ é ideal esquerdo em $\mathbf{A}$, e logo $L\cdot M_1 + \mathbf{I}_\theta = L\cdot M_2 + \mathbf{I}_\theta$. Assim, a equação

$$\varphi(L)(M_1 + \mathbf{I}_\theta) = L\cdot M + \mathbf{I}_\theta$$

define inequivocamente um operador linear $\varphi(L)$ actuando sobre o espaço pré-Hilbert $\mathbf{A}/\mathbf{I}_\theta$. Como

$$\|L\|^2\,\mathbf{1} - L^*\cdot L = \|L^*\cdot L\|\,\mathbf{1} - L^*\cdot L \in \mathbf{A}^+$$

vem que

$$M^*\left(\|L\|^2\,\mathbf{1} - L^*\cdot L\right)M \in \mathbf{A}^+,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
||L||^2||M + \mathbf{I}_\theta||^2 - ||\varphi(L)(M + \mathbf{I}_\theta)||^2 &= ||L||^2||M + \mathbf{I}_\theta||^2 - ||L\cdot M + \mathbf{I}_\theta||^2 \\
&= ||L||^2\,\langle M + \mathbf{I}_\theta, M + \mathbf{I}_\theta\rangle - \langle L\cdot M + \mathbf{I}_\theta, L\cdot M + \mathbf{I}_\theta\rangle \\
&= ||L||^2\theta(M^*\cdot M) - \theta(M^*\cdot L^*\cdot L\cdot M) \\
&= \theta(M^*\cdot(||L||^2\mathbf{1} - L^*\cdot L)\cdot M) \geq 0,
\end{aligned}$$

para $L, M \in \mathbf{A}$. Assim, $\varphi(L)$ é limitado e $||\varphi(L)|| \leq ||L||$, e $\varphi(L)$ prolonga-se por continuidade a um operador linear limitado $\varphi_\theta(L)$ actuando sobre $\mathbf{H}_\theta$. Como $\varphi(\mathbf{1})$ é o operador identidade sobre $\mathbf{A}/\mathbf{I}_\theta$, $\varphi_\theta(\mathbf{1})$ é o operador identidade sobre $\mathbf{H}_\theta$. Quando $L, M, N \in \mathbf{A}$ e $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_\theta(aL + bM)(N + \mathbf{I}_\theta) &= (aL + bM)\cdot N + \mathbf{I}_\theta \\
&= a(L\cdot N + \mathbf{I}_\theta) + b(M\cdot N + \mathbf{I}_\theta) \\
&= (a\varphi_\theta(L) + b\varphi_\theta(M))(N + \mathbf{I}_\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_\theta(L{\cdot}M)(N+\mathbf{I}_\theta) &= L{\cdot}M{\cdot}N+\mathbf{I}_\theta\\ &= \varphi_\theta(L)(M{\cdot}N+\mathbf{I}_\theta)\\ &= \varphi_\theta(L)\varphi_\theta(M)(N+\mathbf{I}_\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\varphi_\theta(L)(M+\mathbf{I}_\theta),N+\mathbf{I}_\theta\rangle &= \langle L{\cdot}M+\mathbf{I}_\theta,N+\mathbf{I}_\theta\rangle=\theta(N^*{\cdot}L{\cdot}M)\\ &= \theta((L^*{\cdot}M)^*{\cdot}M)=\langle M+\mathbf{I}_\theta,L^*{\cdot}N+\mathbf{I}_\theta\rangle\\ &= \langle M+\mathbf{I}_\theta,\varphi_\theta\left(L^*\right)\left(N+\mathbf{I}_\theta\right)\rangle.\end{aligned}$$

Destas relações, como $\mathbf{A}/\mathbf{I}_\theta$ é denso em $\mathbf{H}_\theta$, sai que

$$\varphi_\theta(aL+bM)=a\varphi_\theta(L)+b\varphi_\theta(M),$$

$$\varphi_\theta(L{\cdot}M)=\varphi_\theta(L)\varphi_\theta(M),$$

$$\varphi_\theta(L)^*=\varphi_\theta(L^*).$$

Assim sendo, $(\varphi_\theta,\mathbf{H}_\theta)$ é uma representação de $\mathbf{A}$. Com x_θ, e como $\mathbf{1}+\mathbf{I}_\theta\in\mathbf{A}/\mathbf{I}_\theta$, vem que

$$\varphi_\theta(L)x_\theta=\varphi_\theta(L)(\mathbf{1}+\mathbf{I}_\theta)=L+\mathbf{I}_\theta \qquad (L\in\mathbf{A}).$$

Assim, $\overline{\varphi_\theta(\mathbf{A})x_\theta}=\mathbf{A}/\mathbf{I}_\theta$ e x_θ é um vector cíclico para φ_θ. Mais,

$$\langle\varphi_\theta(L)x_\theta,x_\theta\rangle=\langle L+\mathbf{I}_\theta,\mathbf{1}+\mathbf{I}_\theta\rangle=\theta(L) \qquad (L\in\mathbf{A}).$$

Em particular, $||x_\theta||^2=\theta(\mathbf{1})=1$.

□

Observação 1.1.17. *A construção de Gelgand-Naimark-Segal também é conhecida por*

Construção GNS

Lema 1.1.18. *Seja* $\mathbf{A}$ *uma álgebra-C***. Se* $a\in\mathbf{A}\backslash\{\mathbf{0}\}$*, então existe um estado puro de* $\mathbf{A}$*,* θ*, tal que* $\varphi_\theta(a)\neq 0$*, onde* $(\varphi_\theta,\mathbf{H}_\theta)$ *é a representação de* $\mathbf{A}$*, obtida de* θ *pela construção GNS.*

Demonstração. Se $\theta(a)=0$, então ou $\theta(a)$ é real ou $\theta(a)\geq 0$, qualquer que seja o estado θ. Assim, existe um estado puro de $\mathbf{A}$, θ, tal que $\theta(a)\neq 0$. Logo, $\langle\varphi_\theta(a)x_\theta,x_\theta\rangle\neq 0$, pelo que $\varphi_\theta(a)\neq 0$.

□

Teorema 1.1.19. [**Teorema de Gelfand** $-$ **Naimark**] *Toda a álgebra-C** *admite uma representação fiel.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{A}$ uma álgebra-C* e $\mathbf{E}_0$ uma família de estados de $\mathbf{A}$ que contém todos os estados puros.

Seja Φ a soma directa da família $\{\varphi_\theta:\theta\in\mathbf{E}_0\}$, onde $(\varphi_\theta,\mathbf{H}_\theta)$ é a representação que se obtém de θ pela construção GNS.

Se $a\in\mathbf{A}$ e $\Phi(a)=0$, então $\varphi_\theta(a)=0$ ($\theta\in\mathbf{E}_0$), visto que $\Phi(a)=\bigoplus\limits_{\theta\in\mathbf{E}_0}\varphi_\theta(a)$. Em particular, $\varphi_\theta(a)=0$ para cada estado puro de $\mathbf{A}$. Pelo Lema 1.1.18 sai que $a=0$. Logo, Φ é uma representação fiel de $\mathbf{A}$.

□

Observação 1.1.20. *Contrariamente ao convencionado, nas demontrações antecedentes optou-se por usar o θ, letra minúscula do alfabeto grego, para representar um estado, ao invés de "e", como na literatura de referência, por uma questão de legibilidade.*

Teorema 1.1.21. *Sejam* $\mathbf{H}$ *um espaço Hilbert e* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{H})$ *um conjunto convexo. Então* $\overline{\mathbf{K}}^{t.forte} = \overline{\mathbf{K}}^{t.fraca}$.

Demonstração. Usemos a notação adoptada na definição das topologias de operadores. Admita-se que $L \in \overline{\mathbf{K}}^{t.forte}$. Sejam $x \in \mathbf{H}$ e $\varepsilon > 0$ tal que $||Lx||_{\mathbf{H}} \leq \varepsilon$. Ora, para $f \in \mathbf{H}$ vem que $|\langle f, Lx\rangle| \leq ||f||_{\mathbf{H}}.||Lx||_{\mathbf{H}}$ pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Logo, para uma escolha conveniente de $f \in \mathbf{H}$ vem que $L \in \overline{\mathbf{K}}^{t.fraca}$, pelo que $\overline{\mathbf{K}}^{t.forte} \subseteq \overline{\mathbf{K}}^{t.fraca}$. Admita-se que $L \in \overline{\mathbf{K}}^{t.fraca}$ e considere-se $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{H}$. Designemos por $\widetilde{\mathbf{H}}$ a soma directa $\underbrace{\mathbf{H} \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}}_{n \text{ vezes}}$. Dado $L \in \mathbf{L}(\mathbf{H})$ caracterizemos $\widetilde{L}(y_1, \cdots, y_n)$ por $(Ly_1, \cdots, Ly_n)$, i.e., $\widetilde{L} = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n \text{ vezes}}$. Então, $\widetilde{\mathbf{K}} = \{\widetilde{L} : L \in \mathbf{K}\} \subseteq \mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{H}})$ é um conjunto convexo, e $\widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{x}$ é um subconjunto convexo de $\widetilde{\mathbf{H}}$, onde $\widetilde{x} = (x_1, \cdots, x_n)$. Como $\widetilde{L}$ está no fecho fraco de $\widetilde{\mathbf{K}}$, $\widetilde{L}\widetilde{x}$ está no fecho fraco de $\widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{x}$ (em $\widetilde{\mathbf{H}}$). Da Análise Funcional sabemos que num **ELC** o fecho de um conjunto convexo coincide na topologia inicial e na topologia herdada. Assim, $\widetilde{L}\widetilde{x}$ está no fecho da norma de $\widetilde{\mathbf{K}}\widetilde{x}$ (em $\widetilde{\mathbf{H}}$). Então, para um certo $K \in \mathbf{K}$, $||Kx_j - Lx_j||$ é suficientemente pequeno para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$. Segue-se que $L \in \overline{\mathbf{K}}^{t.forte}$, pelo que $\overline{\mathbf{K}}^{t.fraca} \subseteq \overline{\mathbf{K}}^{t.forte}$. □

De forma perfeitamente análoga, prova-se que, nas mesmas condições do teorema,

$$\overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-forte} = \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-fraca},$$
$$\overline{\mathbf{K}}^{t.forte-*} = \overline{\mathbf{K}}^{t.fraca-*},$$
$$\overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-forte-*} = \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-fraca-*}.$$

Mudando a argumentação do teorema para considerar somas directas contáveis, mostra-se que

$$\overline{\mathbf{K}}^{t.forte} = \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-forte},$$
$$\overline{\mathbf{K}}^{t.fraca} = \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-fraca},$$
$$\overline{\mathbf{K}}^{t.forte-*} = \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-forte-*},$$
$$\overline{\mathbf{K}}^{t.fraca-*} = \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-fraca-*},$$

saindo que

$$\begin{aligned} &\overline{\mathbf{K}}^{t.forte} = \overline{\mathbf{K}}^{t.fraca} \\ &= \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-forte} = \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-fraca} \\ &= \overline{\mathbf{K}}^{t.forte-*} = \overline{\mathbf{K}}^{t.fraca-*} \\ &= \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-forte-*} = \overline{\mathbf{K}}^{t.\sigma-fraca-*}. \end{aligned}$$

Definição 1.1.22. ***Álgebra-W**** *é uma álgebra-C*,* $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \cdot\})$*, fechada para uma topologia* $\mathbf{t.f}$*, onde* $\mathbf{t.f} \prec \mathbf{t.norma}$*, i.e.,* $\overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{t.norma}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{t.f}}$*, e* $\prec$ *significa ≪estritamente mais fraca do que≫, como se segue: a aplicação identidade,*

$id : x \mapsto x,$

é tal que

$id : (\mathbf{A}, \mathbf{t.f}) \to (\mathbf{A}, \mathbf{t.norma})$

é contínua e

$id : (\mathbf{A}, \mathbf{t.norma}) \to (\mathbf{A}, \mathbf{t.f})$

não é contínua.

Observação 1.1.23. *As álgebras-W* também tomam o nome de* ***álgebras de von Neumann****. Segundo alguns autores da escola japonesa (ver [19, 20, 21, 22, 23]) a designação* ***Álgebra de von Neumann****, ou* ***Álgebra vN****, é uma terminologia que teve a sua origem em* ***Jacques Dixmier****. Contudo, Alain Connes [em [3], pág. 447] considera que se trata da terminologia de* ***Jean Dieudonné****. Esta aparente contradição fica resolvida se compreendermos que [4] é a tradução para inglês da obra que fixou o grosso da terminologia em uso no quadro das álgebras−W*.*

Uma álgebra-$*$ com identidade é um espaço convexo. Assim

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{A}}^{t.forte} = \overline{\mathbf{A}}^{t.fraca}\\
&= \overline{\mathbf{A}}^{t.\sigma-forte} = \overline{\mathbf{A}}^{t.\sigma-fraca}\\
&= \overline{\mathbf{A}}^{t.forte-*} = \overline{\mathbf{A}}^{t.fraca-*}\\
&= \overline{\mathbf{A}}^{t.\sigma-forte-*} = \overline{\mathbf{A}}^{t.\sigma-fraca-*},
\end{aligned}$$

ficando justificada a forma como se definiu álgebra-W*.

1.2 Geometria das projecções

Referências: [4, 15, 16, 25, 31, 35]

A importância das projecções, no quadro das álgebras de von Neumann começa quando verificamos que uma qualquer álgebra de von Neumann é gerada pelas suas projecções. Os cálculos ficam imediatamente mais simples na medida em que *um fecho na topologia da norma sobre as projecções é suficiente para gerar toda a álgebra de von Neumann*. É melhor trabalhar com a topologia da norma do operador do que trabalhar com uma qualquer outra topologia de operadores que seja mais fina.

Definição 1.2.1. *Seja* $(\mathbf{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, *, +, \cdot\} \cup \mathbb{C})$ *uma álgebra-$*$ com identidade sobre* $\mathbf{L}(\mathbf{H})$*, onde* $\mathbf{H}$ *é espaço Hilbert complexo. Dizemos que* $p \in \mathbf{A}$ *é uma* ***projecção*** *se* p *for um operador tal que* $p^* = p = p^2$*.*

Representa-se uma projecção por uma *letra minúscula do alfabeto latino*. Isto é razoável porque, por direito próprio, uma projecção é um operador.

Definição 1.2.2. $\mathcal{P}_{\mathbf{L}(\mathbf{H})}$ *é o* ***conjunto de todas as projecções*** *de* $\mathbf{L}(\mathbf{H})$*.*

Definição 1.2.3. *Duas projecções* $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L}(\mathbf{H})}$ *dizem-se* ***projecções ortogonais*** *se*

$$p_1 \cdot p_2 = \mathbf{0}.$$

Teorema 1.2.4. *Se $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$ e $p \neq \mathbf{0}$, então $||p|| = 1$.*

Demonstração. Temos que $p^2 = p$. Assim, $||p^2|| = ||p||^2 = ||p||$.
De $(||p|| - 1)||p|| = 0$ vem que $||p|| = 0$ ou $||p|| = 1$.
Como $p \neq \mathbf{0} \Rightarrow ||p|| \neq 0$ vem $||p|| = 1$. □

Teorema 1.2.5. *Dadas as projecções $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$ temos:*

a) $p_1 \cdot p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}} \Leftrightarrow p_1 \cdot p_2 = p_2 \cdot p_1$;
b) $p_1 + p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}} \Leftrightarrow p_1 \cdot p_2 = \mathbf{0}$.

Demonstração. Por hipótese, $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$.
(a)
Se $p_1 \cdot p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$ vem que $(p_1 \cdot p_2)^* = p_1 \cdot p_2$.
Por outro lado, $(p_1 \cdot p_2)^* = p_2^* \cdot p_1^* = p_2 \cdot p_1$.
Logo, $p_1 \cdot p_2 = p_2 \cdot p_1$.
Reciprocamente, se $p_1 \cdot p_2 = p_2 \cdot p_1$, vem que

$$(p_1 \cdot p_2)^2 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot (p_2 \cdot p_1) \cdot p_2 = p_1 \cdot (p_1 \cdot p_2) \cdot p_2 = p_1^2 \cdot p_2^2 = p_1 \cdot p_2$$

e que

$$(p_1 \cdot p_2)^* = p_2^* \cdot p_1^* = p_2 \cdot p_1 = p_1 \cdot p_2.$$

Logo, $p_1 \cdot p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$.
(b)
Se $p_1 + p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$ vem que $(p_1 + p_2)^2 = p_1 + p_2$.
Por outro lado, $(p_1 + p_2)^2 = p_1 + 2(p_1 \cdot p_2) + p_2$, pelo que $p_1 \cdot p_2 = \mathbf{0}$.
Reciprocamente, $(p_1 + p_2)^* = p_1^* + p_2^* = p_1 + p_2$ e, se $p_1 \cdot p_2 = \mathbf{0}$, vem que

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2(p_1 \cdot p_2) + p_2^2 = p_1 + 2(p_1 \cdot p_2) + p_2 = p_1 + p_2.$$

Logo, $p_1 + p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$.

□

Teorema 1.2.6. $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}} \Longrightarrow \mathbf{1} - p \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$

Demonstração. Como p é uma projecção, temos que

$$\begin{aligned}(\mathbf{1} - p)^* &= \mathbf{1} - p^* \\ &= \mathbf{1} - p\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}(\mathbf{1} - p)^2 &= (\mathbf{1} - p) \cdot (\mathbf{1} - p) \\ &= \mathbf{1} - p - p + p^2 \\ &= \mathbf{1} - 2p + p \\ &= \mathbf{1} - p.\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{1} - p$ é projecção.

□

Teorema 1.2.7. *Se $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$, então $1 - p$ é o ortogonal de p, e denota-se por $p^{\perp}$.*

Demonstração. $p \cdot (1 - p) = p - p^2 = p - p = \mathbf{0}$. □

Teorema 1.2.8. *Se $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$, então $p\mathbf{H}$ é um subespaço fechado de $\mathbf{H}$, dito **subespaço projecção** de p, enquanto que $(\mathbf{1} - p)\mathbf{H}$ é o complemento ortogonal de $p\mathbf{H}$, i.e., $(\mathbf{1} - p)\mathbf{H} = (p\mathbf{H})^{\perp}$.*

Demonstração. O fecho de $p\mathbf{H}$ é consequência da completude de $\mathbf{H}$. Sejam $x, y \in p\mathbf{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então, existem $a, b \in \mathbf{H}$ tais que $x = p(a)$, $y = p(b)$, pelo que

$$\alpha x + \beta y = \alpha p(a) + \beta p(b) = p(\alpha a + \beta b).$$

Como $\alpha a + \beta b \in \mathbf{H}$, vem que $p(\alpha a + \beta b) \in p\mathbf{H}$, pelo que $p\mathbf{H}$ é um subespaço vectorial de $\mathbf{H}$. Como $(\mathbf{1} - p) \cdot p = \mathbf{0}$, vem que $(\mathbf{1} - p)\mathbf{H} = (p\mathbf{H})^{\perp}$.

□

Observação 1.2.9. *Dado um subespaço fechado $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{H}$ à projecção $p \in \mathbf{L(H)}$ tal que $p\mathbf{H} = \mathbf{S}$ dá-se o nome de projecção sobre o subespaço $\mathbf{S}$, e será denotada por $proj_{\mathbf{S}}$.*

Definição 1.2.10. ***Isometria** é um operador $x \in \mathbf{L(H)}$ tal que $||x\xi|| = ||\xi||$, para todo $\xi \in \mathbf{H}$.*

Definição 1.2.11. ***Isometria parcial** é todo o operador $x \in \mathbf{L(H)}$ tal que $x^* \cdot x$ é uma projecção, i.e., é um operador $x \in \mathbf{L(H)}$ tal que existe um subespaço fechado $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{H}$ tal que $x|_{\mathbf{S}}$ é isometria em $\mathbf{S}$ e $x|_{\mathbf{S}^{\perp}} = 0$. O subespaço fechado $\mathbf{S}$ toma o nome de **subespaço inicial da isometria**; e denominamos o subespaço $x\mathbf{S}$ de **subespaço final da isometria**. A projecção $x^* \cdot x$ toma o nome de **projecção inicial** da isometria parcial x e a projecção $x \cdot x^*$ toma o nome de **projecção final** da isometria parcial x. O subespaço da projecção inicial/final é o subespaço inicial/final de x.*

Definição 1.2.12. ***Projecções equivalentes** são quaisquer projecções $f, g \in \mathcal{P}_{\mathbf{L(H)}}$, para as quais existe uma isometria parcial $v \in \mathbf{L(H)}$ tal que $f = v^* \cdot v$ e $g = v \cdot v^*$. Denotamos $f \simeq g$.*

As projecções são equivalentes quando as dimensões dos espaços onde elas projectam são isomorfas.

Teorema 1.2.13. *Se $x \in \mathbf{L(H)}$ e $p = x^* \cdot x$ é uma projecção, então $q = x \cdot x^*$ também é uma projecção, sendo que x é uma isometria parcial cujo subespaço inicial é $\mathbf{S} = p\mathbf{H}$.*

Demonstração. Como $(x^* \cdot x)^2 = x^* \cdot x$, vem que

$$\begin{aligned} ||x - x \cdot x^* \cdot x||^2 &= ||(x - x \cdot x^* \cdot x) \cdot (x - x \cdot x^* \cdot x)|| \\ &= \cdots = 0, \end{aligned}$$

pelo que

$$x = x \cdot x^* \cdot x$$

e

$$(x \cdot x^*)^2 = x \cdot x^*.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \xi &\in \mathbf{S} \\ &\Rightarrow \xi = (x^* \cdot x)\xi \\ &\Rightarrow ||\boldsymbol{\xi}||^2 = \langle \xi, \xi \rangle = \langle (x^* \cdot x)\, \xi, \xi \rangle = ||x\xi||^2 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \xi &\in \mathbf{S}^{\perp} \\ &\Rightarrow 0 {=} (x^* \cdot x)\xi \\ &\Rightarrow 0 = (x \cdot x^* \cdot x)\xi = x\xi. \end{aligned}$$

□

Definição 1.2.14. [**Ordem parcial nas projecções**] *Sejam $f, g \in \mathcal{P}_{\mathbf{L}(\mathbf{H})}$. Escrevemos $f \precsim g$ quando existe $g_0 \in \mathcal{P}_{\mathbf{L}(\mathbf{H})}$, $g_0 \leq g$, tal que $f \simeq g_0$.*

Observação 1.2.15. $(\mathcal{P}_{\mathbf{L}(\mathbf{H})}, \precsim)$ *é um reticulado completo.*

Definição 1.2.16. ***Projecção minimal*** *é toda a projecção g tal que*

$$(f \leq g) \implies (f = g) \vee (f = \mathbf{0}),$$

com f projecção.

Observação 1.2.17. *As projecções minimais são as projecções em subespaços de dimensão um.*

Definição 1.2.18. ***Projecção finita*** *é toda a projecção g tal que*

$$(f \leq g) \wedge (f \simeq g) \implies (f = g),$$

com f projecção.

Observação 1.2.19. *As projecções finitas são as projecções em subespaços de dimensão finita.*

Observação 1.2.20. *Seja $\mathbf{H}$ um espaço Hilbert. Dados $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{H})$ e $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{H})$ faz-se*

1. $\mathbf{XY} = \{x \cdot y : \ x \in \mathbf{X}, \ y \in \mathbf{Y}\}$,

2. $[\mathbf{XY}] =$ subespaço vectorial fechado gerado por $\mathbf{XY}$.

3. $proj_{[\mathbf{XY}]} =$ *projecção sobre* $[\mathbf{XY}]$

4. $\mathbf{XY} \equiv \mathbf{X}\xi$ e $[\mathbf{XY}] \equiv [\mathbf{X}\xi]$, quando $\mathbf{Y} = \{\xi\}$ e $\xi \in \mathbf{H}$.

Definição 1.2.21. *Seja $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{H})$. Ao conjunto*
$\mathbf{A}' {=} \{x \in \mathbf{L}(\mathbf{H}) : x \cdot y = y \cdot x$, *para todo o* $y \in \mathbf{A}\}$
damos o nome de ***comutante*** *de* $\mathbf{A}$.

Definição 1.2.22. *Seja* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{H})$*. Ao comutante do comutante de* $\mathbf{A}$ *damos o nome de* ***bicomutante*** *de* $\mathbf{A}$ *e denotamo-lo por* $\mathbf{A}''$.

A construção sucessiva de comutantes permite-nos fazer as seguintes identificações: $\mathbf{A}'' = (\mathbf{A}')'$, $\mathbf{A}''' = (\mathbf{A}'')' = (\mathbf{A}')''$, $\cdots$

Proposição 1.2.23. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}' \subseteq \mathbf{A}'$

Demonstração. Sejam $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ e $x \in \mathbf{B}'$. Então $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $y \in \mathbf{B}$. Como $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ vem, em particular, que $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $y \in \mathbf{A}$, pelo que $x \in \mathbf{A}'$. Logo, $\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{A}'$. □

Corolário 1.2.24. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}'' \subseteq \mathbf{B}''$

Demonstração. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}' \subseteq \mathbf{A}' \Rightarrow (\mathbf{A}')' \subseteq (\mathbf{B}')'$. □

Teorema 1.2.25. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}'' = \mathbf{A}^{(4)} = \cdots;\ \mathbf{A}' = \mathbf{A}''' = \mathbf{A}^{(5)} = \cdots$

Demonstração. Seja $x \in \mathbf{A}$. Por definição, x comuta com todos os elementos do comutante de $\mathbf{A}$, i.e., $x \in \mathbf{A}''$. Logo, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}''$.
Já vimos que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}' \subseteq \mathbf{A}'$ e $\mathbf{A}'' \subseteq \mathbf{B}''$. Assim,
$$\mathbf{A}''' = (\mathbf{A}'')' \subseteq \mathbf{A}'$$
e
$$\mathbf{A}''' = (\mathbf{A}')'' \supseteq \mathbf{A}'.$$
Assim, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'''$. A iteração na operação comutante dá-nos que
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}''' = \mathbf{A}^{(5)} = \cdots.$$
Substituindo $\mathbf{A}'$ por $\mathbf{A}''$ vem que
$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}^{(4)} = \cdots.$$
□

Teorema 1.2.26. *Sejam* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{H})$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ *e* $p \in \mathbf{A}$ *uma projecção. Então* $p \in \mathbf{A}' \Leftrightarrow x \cdot p = p \cdot x \cdot p$, *para cada* $x \in \mathbf{A}$

Demonstração.
$p \in \mathbf{A}'$
$$\Rightarrow x \cdot p = p \cdot x, \text{ para cada } x \in \mathbf{A}$$
$$\Rightarrow x \cdot p = (p \cdot p) \cdot x, \text{ para cada } x \in \mathbf{A}$$
$$\Rightarrow x \cdot p = p \cdot (p \cdot x), \text{ para cada } x \in \mathbf{A}$$
$$\Rightarrow x \cdot p = p \cdot (x \cdot p), \text{ para cada } x \in \mathbf{A}$$
$$\Rightarrow x \cdot p = p \cdot x \cdot p, \text{ para cada } x \in \mathbf{A}.$$
Seja $x \in \mathbf{A}$. Então $x^* \in \mathbf{A}$. Logo
$$x \cdot p = p \cdot x \cdot p \wedge x^* \cdot p = p \cdot x^* \cdot p$$
$$\Rightarrow x \cdot p = p \cdot x \cdot p \wedge (x^* \cdot p)^* = (p \cdot x^* \cdot p)^*$$
$$\Rightarrow x \cdot p = p \cdot x \cdot p \wedge p^* \cdot x = p^* \cdot x \cdot p^*$$
$$\Rightarrow x \cdot p = p \cdot x \cdot p \wedge p \cdot x = p \cdot x \cdot p$$
$$\Rightarrow x \cdot p = p \cdot x$$
$$\Rightarrow p \in \mathbf{A}'$$
□

Teorema 1.2.27. *Sejam* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{H})$ *e* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. *Então* $proj_{[\mathbf{A}\xi]} \in \mathbf{A}'$ *para todo* $\xi \in \mathbf{H}$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathbf{A}$, $\xi \in \mathbf{H}$ e faça-se $p = proj_{[\mathbf{A}\xi]}$.

Caso $\eta \in [\mathbf{A}\xi]$ temos que

$$(p \cdot x \cdot p)(\eta) = (p \cdot x)(p(\eta)) = (p \cdot x)(\eta),$$

pelo que $p \cdot x \cdot p = p \cdot x$ em $[\mathbf{A}\xi]$.

Caso $\eta \in [\mathbf{A}\xi]^{\perp}$ temos que

$$(p \cdot x \cdot p)(\eta) = (p \cdot x)(p(\eta)) = (p \cdot x)(0) = 0.$$

Ora, $(p \cdot x)(\eta) = 0$ se $x(\eta) \in [\mathbf{A}\xi]^{\perp}$, o que equivale a dizer que dado $a \in \mathbf{A}$

$$\langle x(\eta), a(\xi)\rangle = 0.$$

Mas $\langle x(\eta), a(\xi)\rangle = \langle \eta, (x^* \cdot a)(\xi)\rangle = 0$, pois $\eta \in [\mathbf{A}\xi]^{\perp}$.

Pelo Teorema 1.2.26 sai que $proj_{[\mathbf{A}\xi]} \in \mathbf{A}'$ para todo $\xi \in \mathbf{H}$.

□

Teorema 1.2.28. *Sejam $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{H})$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, $\xi \in \mathbf{H}$ e $p = proj_{[\mathbf{A}\xi]}$. Então, $K = [\mathbf{A}\xi]$ é invariante para qualquer $x'' \in \mathbf{A}''$.*

Demonstração. Temos que mostrar que $x''K \subseteq K$. Sabemos que

$$x''K \subseteq K \iff (x'' \cdot a)(\xi) \in K, \text{ para todo o } a \in \mathbf{A}.$$

Seja $a \in \mathbf{A}$. Pelo Teorema 1.2.27, $p \in \mathbf{A}'$. Como $x'' \in \mathbf{A}''$ vem que

$$\begin{aligned} p(x''(a(\xi))) &= (p \cdot x'')(a(\xi)) = (x'' \cdot p)(a(\xi)) \\ &= x''(p(a(\xi))) = x''(a(\xi)) \\ &= (x'' \cdot a)(\xi). \end{aligned}$$

Pela definição de p e de K vem que

$$\begin{aligned} p(x''(a(\xi))) &= x''(a(\xi)) \\ &\Longrightarrow x''(a(\xi)) \in K. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.29. [**Teorema da densidade do bicomutante**] *Seja $\mathbf{A}$ uma álgebra-$*$ com identidade sobre $\mathbf{L}(\mathbf{H})$. Então $\mathbf{A}''=\overline{\mathbf{A}}^{t.forte}$.*

Demonstração. Provemos que $\overline{\mathbf{A}}^{t.forte} \subseteq \mathbf{A}''$, i.e., $x_i \underset{t.forte}{\longrightarrow} x \Longrightarrow x \in \mathbf{A}''$. Sejam

$$\{x_i\} \subseteq \mathbf{A}, x = \lim_{t.forte}(x_i), a' \in \mathbf{A}' \text{ e } \xi \in \mathbf{H}.$$

Então

$$\begin{aligned} ||(x \cdot a' - a' \cdot x)\xi|| &= ||(x \cdot a' - x_i \cdot a' + x_i \cdot a' - a' \cdot x)\xi|| \\ &\leq ||(x \cdot a' - x_i \cdot a')\xi|| + ||(x_i \cdot a' - a' \cdot x)\xi|| \\ &= ||((x - x_i) \cdot a')\xi|| + ||(a' \cdot x_i - a' \cdot x)\xi|| \\ &= ||((x - x_i) \cdot a')\xi|| + ||a' \cdot (x_i - x)\xi|| \\ &\leq (||(x - x_i) \cdot a'|| + ||a' \cdot (x_i - x)||)|\xi|. \end{aligned}$$

Quando $x_i \underset{t.forte}{\longrightarrow} x$ vem que $||(x \cdot a' - a' \cdot x)\xi|| \longrightarrow 0$, qualquer que seja o $\xi \in \mathbf{H}$. Assim, $x \cdot a' - a' \cdot x = \mathbf{0}$, pelo que $x \in \mathbf{A}''$.

Vejamos agora que $\mathbf{A}'' \subseteq \overline{\mathbf{A}}^{t.forte}$, i.e., $x \in \mathbf{A}'' \Longrightarrow x \in \overline{\mathbf{A}}^{t.forte}$. Seja $x'' \in \mathbf{A}''$. Tome-se $\xi \in \mathbf{H}$. Ora, $proj_{[\mathbf{A}\xi]} \in \mathbf{A}'$, e $[\mathbf{A}\xi]$ fica invariante para qualquer operador de $\mathbf{A}''$. Como $\mathbf{1} \in \mathbf{A}$, vem que $\xi \in [\mathbf{A}\xi]$, pelo que $x''\xi \in [\mathbf{A}\xi]$. Considere-se $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathbf{H}$ e construa-se

$$\widetilde{\mathbf{H}_n} = \underbrace{\mathbf{H} \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}}_{n \text{ vezes}}.$$

Assim,

$$\widetilde{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \widetilde{\mathbf{H}_n}$$

e

$$\widetilde{\mathbf{A}_n} = \{\widetilde{x} : \ x \in \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{H}_n}).$$

Resulta que $\widetilde{\mathbf{A}_n} \subseteq \mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{H}_n})$ é um álgebra-$*$ e

$$(\widetilde{\mathbf{A}_n})' = \{(x'_{ij}) : \ x'_{ij} \in \mathbf{A}', \ i, j = 1, \cdots, n\} = Mat_n(\mathbf{A}').$$

De facto, a relação, em $\mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{H}_n})$, dada por

$$\mathbf{0} = \widetilde{x}(x'_{ij}) - (x'_{ij})\widetilde{x} = (xx'_{ij} - x'_{ij}x)$$

vale para qualquer $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbf{A}_n}$ sse as relações, em $\mathbf{L}(\mathbf{H})$, dadas por

$$xx'_{ij} = x'_{ij}x, \ i, j = 1, \cdots, n$$

forem válidas para qualquer $x \in \mathbf{A}$. Consequentemente, qualquer que seja $(x'_{ij}) \in (\widetilde{\mathbf{A}_n})'$ temos que

$$\widetilde{x}''(x'_{ij}) - (x'_{ij})\widetilde{x}'' = (x''x'_{ij} - x'_{ij}x'') = \mathbf{0},$$

ou seja

$$\widetilde{x}'' \in (\widetilde{\mathbf{A}_n})''.$$

Pelo que já demonstramos vem que

$$\widetilde{x}''\widetilde{\xi} \in [\widetilde{\mathbf{A}_n}\widetilde{\xi}].$$

Assim, existe uma sucessão $\{x_m\} \subseteq \mathbf{A}$, tal que

$$\lim_{m \to +\infty} ||(x'' - x_m)\xi_k|| = 0, \ k = 1, \cdots, n.$$

Segue-se que $x'' \in \overline{\mathbf{A}}^{t.forte}$.

$\square$

Teorema 1.2.30. [**Caracterização das álgebras de von Neumann**] *Seja* $\mathbf{A}$ *uma álgebra*$-*$ *com identidade. Então, são equivalentes as seguintes condições:*

a) $\mathbf{A}$ *é álgebra de von Neumann (ou álgebra vN).*

b) $\mathbf{A}$ *é álgebra-W***.*

c) $\mathbf{A} = \mathbf{A}''$.

d) $\mathbf{A}$ *é álgebra-C** *e* $\overline{\mathbf{A}}^{t.norma} = \overline{\mathbf{A}}^{t.f}$*, com* $t.f \prec t.norma$.

Demonstração. a) $\Leftrightarrow$ b) pela construção GNS (Teorema 1.1.16).

b) $\Leftrightarrow$ d) pela definição de álgebra-W* (Definição 1.1.22).

c) $\Leftrightarrow$ d) pela densidade do bicomutante (Teorema 1.2.29).

□

Definição 1.2.31. *Seja* $M \subseteq \mathbf{L}(H)$ *uma álgebra de von Neumann. Ao conjunto dado por* $\mathcal{Z}[M] = \{x \in M : x \cdot m = m \cdot x$*, para todo* $m \in M\}$*, denominamos* ***centro da álgebra*** *de von Neumann* M.

Observação 1.2.32. *O centro de uma álgebra mede o grau de comutatividade da álgebra.*

Definição 1.2.33. M *é* ***álgebra hiperfinita de von Neumann*** *se existir uma cadeia ascendente de álgebras de von Neumann de dimensão finita,* $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$*, tal que* $M_0 = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} M_i$ *gera* M*, i.e.,* $M = M_0''$.

Definição 1.2.34. *Seja* M *uma álgebra de von Neumann. Um* ***traço*** *é todo o funcional linear* $tr : M \to \mathbb{C}$ *verificando as condições:*

a) (positividade): $tr(xx^*) \geq 0$*, para todo o* $x \in M$.

b) $tr\,(xy) = tr\,(yx)$*, para todo o* $x, y \in M$.

Definição 1.2.35. *Um traço* $tr : M \to \mathbb{C}$ *sobre a álgebra de von Neumann* $(M, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot\} \cup \mathbb{C})$ *é* ***traço fiel*** *se para qualquer* $x \in M$

$$\begin{array}{rcl} tr(xx^*) & = & 0 \\ & \Downarrow & \\ x & = & \mathbf{0} \end{array}$$

Observação 1.2.36. *Seja* $M \subseteq \mathbf{L}(H)$ *uma álgebra de von Neumann.* $(\mathcal{P}_M, \precsim)$ *é um reticulado completo.*

1.3 Instanciação das álgebras de von Neumann

Referências: [3, 5, 11, 12, 25, 31, 35]

O termo *álgebra de operadores* é aqui utilizado para designar uma álgebra de operadores limitados sobre um espaço Hilbert H, que é fechada para a operação adjunto $a \mapsto a^*$ definida pela fórmula $\langle a\psi, \eta \rangle = \langle \psi, a^*\eta \rangle$, onde $\psi, \eta \in H$. De acordo com as propriedades de completude, duas álgebras de operadores podem definir-se: as álgebras fechadas para a topologia $t.norma$, designadas álgebras-C*, e as álgebras fechadas para a topologia $t.forte$, designadas álgebras vN. Note–se que a topologia $t.forte$ coincide com a topologia da convergência pontual sobre H.

Ainda que uma álgebra vN seja por natureza uma álgebra-C* temos dois objectos completamente diferentes. Uma álgebra vN é pouco interessante quando vista como álgebra-C*, visto que a topologia da norma do operador fica cega e sem capacidade de separação, pelo teorema da densidade do bicomutante (Teorema 1.2.29). **O estudo das álgebras vN é o estudo das álgebras pouco interessantes do ponto de vista das álgebras-C*.**

Quando a **propriedade comutativa** é válida, é possível classificar por completo estes dois objectos. Pelo Teorema de Gelfand-Naimark podemos concluir que *uma qualquer álgebra-C* abeliana é isomorfa à álgebra-$*$ $C_0(\Omega)$ das funções contínuas complexas de suporte compacto sobre o espaço de Hausdorff localmente compacto* Ω. Por outro lado, o *Teorema Espectral* permite-nos concluir que *uma qualquer álgebra vN abeliana é isomorfa a $L^\infty(\Omega,\mu)$ para um certo espaço de medida $(\Omega,\mathcal{E},\mu)$ com medida σ-$finita$ μ.* A colecção das álgebras-C* comutativas é bastante vasta e complicada, enquanto que a lista das álgebras vN comutativas é bastante curta: $L^\infty(\Omega,\mu)$, $l^\infty_\Sigma(\mathbb{C})$ para um certo conjunto contável Σ, e a soma directa destes dois.

Descartando as álgebras de operadores comutativas procuremos aquelas que são **o mais não-comutativas**. No caso das álgebras-C* as estruturas mais não-comutativas são as **álgebras-C* simples**, a saber: *ideais que não sejam simultanemente ideal esquerdo e ideal direito*. No caso das álgebras vN as estruturas que são mais não-comutativas são os **factores**, a saber: *álgebras vN cujo centro contém apenas os múltiplos escalares da identidade*. A mais óbvia álgebra-C* simples é $\mathbf{K}(H)$, a álgebra de todos os operadores compactos sobre o Hilbert H; o mais óbvio dos factores é $\mathbf{L}(H)$, a álgebra de todos os operadores limitados sobre o Hilbert H.

O contraste entre as álgebras-C* e as álgebras vN é mais evidente quando tentamos decompor as álgebras nos seus elementos contitutivos elementares: álgebras-C* simples e factores. Em dimensão finita, a teoria de Wedderburn aplica-se, e uma qualquer álgebra de operadores é a soma directa de álgebras matriciais, sendo a soma indexada pelos idempotentes minimais do centro. John von Neumann generalizou este resultado para as álgebras vN. Apenas é necessário substituir a soma directa pelo **integral directo** sobre o espaço de medida $(\Omega,\mathcal{E},\mu)$, para o qual o centro da álgebra é $L^\infty(\Omega,\mu)$. Os elementos da álgebra tornam-se secções L^∞ de um fibrado mensurável sobre Ω.

Assim, o estudo das álgebras vN reduz-se ao estudo dos factores. No caso das álgebras-C* a situação é bastante mais complicada. O centro não nos dá uma informação precisa da estrutura do ideal; os ideais podem posicionar-se de uma forma bastante complicada, e se assim não for há obstruções às secções contínuas. No topo destas secções o espaço da álgebras-C* é uma grande confusão, mesmo a menos de abstrações isomorficas. Mais, no contexto das álgebras-C*, a topologia geral não-comutativa em nenhuma circustância fica mais simples que a topologia geral comutativa, ao contrário do que acontece com as álgebras vN.

Alguns exemplos

Exemplo 1.3.1. $[$**Uma álgebra $-$ C* comutativa**$]$

Seja Ω um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então,

$$C_0(\Omega) := \left\{ \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C} : f \text{ contínua e } \underset{\text{compacto } K \subseteq \Omega}{\exists} f|_{\Omega \setminus K} = 0 \right\}$$

é uma álgebra-C* comutativa.

Exemplo 1.3.2. [**Uma álgebra $-$ C* simples**]

Sejam u e v operadores unitários sobre o Hilbert H, tais que $uv = e^{2\pi i \theta} vu$ para um certo irracional θ. A classe de isomorfismo da álgebra-C* gerada por u e v depende apenas de θ e nunca da escolha particular de u e v. Assim, esta álgebra-C* é simples e é conhecida como **álgebra da rotação irracional**, sendo denotada por A_θ.

> As álgebras A_θ são isomorfas quando dois valores de θ estão na mesma órbita sob $SL(2, \mathbb{Z})$.

Exemplo 1.3.3. [**Uma álgebra** vN **comutativa**]

Seja $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida com medida finita μ, e seja M a álgebra de operadores de $L^2(\Omega, \mu)$ em $L^2(\Omega, \mu)$, definida por

$$g \overset{f}{\longmapsto} fg \qquad (f \in L^\infty(\Omega, \mu), g \in L^2(\Omega, \mu)).$$

$M = L^\infty(\Omega, \mu)$ é uma álgebra de von Neumann que actua em $L^2(\Omega, \mu)$ por multiplicação, sendo uma álgebra vN comutativa; e logo, $M = M'$. O predual de M é $L^1(\Omega, \mu)$.

> As álgebras vN abelianas são geradas por um operador auto-adjunto e são isomorfas a $L^\infty(\Omega, \mu)$ para algum espaço de medida $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$.

Exemplo 1.3.4. [**Uma álgebra** vN **de grupo**]

Seja G um grupo discreto e $g \mapsto \lambda_g$ a *representação regular esquerda* de G em $l^\infty_G(\mathbb{C})$. Trata-se de uma representação de grupo unitária. Esta álgebra é por vezes denotada por $\mathcal{U}(G) \equiv \{\lambda_g : g \in G\}''$ e toma o nome de *álgebra vN do grupo G*. De facto, quando $|G| < \infty$ estamos na presença do grupo-álgebra $\mathbb{C}G$.

Definição 1.3.5. ***Factor*** *é toda a álgebra de von Neumann M cujo centro é trivial, a saber:* $\mathcal{Z}[M] = \mathbb{C}id$.

Observação 1.3.6. *A primeira* ***classificação dos factores em tipos*** *foi implementada em 1933 por* ***Murray*** *e* ***von Neumann****.*

Definição 1.3.7. ***Factor do tipo*** **I** *é todo o factor que só admite projecções minimais não−nulas. Estes factores classificam-se em tipos* $\mathbf{I}_n$*, com* $n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$*, e tipo* $\mathbf{I}_\infty$*.*

Exemplo 1.3.8. [**Um factor do tipo** $\mathbf{I}_n$]

Um factor M é do tipo $\mathbf{I}_n$ se for isomorfo à álgebra de todos os operadores limitados sobre um certo espaço euclidiano E. Assim, $M = \mathbf{L}(E)$ é factor do tipo $\mathbf{I}_n$ com $n = \dim(E)$. Como $Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbf{L}(\mathbb{C}^n)$, vem que $M = Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ é um factor do tipo $\mathbf{I}_n$, com $n = 1, 2, 3, ...$

Exemplo 1.3.9. [**Um factor do tipo $\mathbf{I}_\infty$**]

Um factor M é do tipo $\mathbf{I}_\infty$ se for isomorfo à álgebra de todos os operadores limitados sobre um certo espaço Hilbert H tal que $\dim(H) = \infty$. Assim, se $\dim(H) = \infty$ e H é Hilbert vem que $M = \mathbf{L}(H)$ é um factor do tipo $\mathbf{I}_\infty$.

Definição 1.3.10. ***Factor do tipo*** $\mathbf{II}$ *é todo o factor que não admitindo projecções minimais não-nulas admite projecções finitas não-nulas. Estes factores classificam-se em tipos* $\mathbf{II}_1$ *ou* $\mathbf{II}_\infty$*.* $\mathbf{II}_1$ *significa que a identidade é finita.* $\mathbf{II}_\infty$ *significa que a identidade é infinita.*

Observação 1.3.11. *Sendo a identidade a maior projecção (projecção no espaço total) vem que nos factores do tipo* $\mathbf{II}_1$ *todas as projecções são finitas. Por isso em grande parte da literatura os factores do tipo* $\mathbf{II}_1$ *tomam o nome de* ***factores finitos****.*

Observação 1.3.12. *Prova-se que* $\mathbf{II}_\infty = \mathbf{II}_1 \otimes \mathbf{L}(l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}))$*.*

Exemplo 1.3.13. [**Um factor do tipo $\mathbf{II}_1$**]

Um factor M é do tipo $\mathbf{II}_1$ se for de dimensão infinita e admitir um funcional traço $tr : M \to \mathbb{C}$ tal que $tr(ab) = tr(ba)$ para cada $a, b \in M$. A álgebra de Clifford de H, onde H é espaço Hilbert de dimensão infinita, denotada $Cliff_{\mathbb{C}}(H)$, é um factor hiperfinito do tipo $\mathbf{II}_1$. Considere-se também a Secção 2.3, onde se constroi um factor hiperfinito do tipo $\mathbf{II}_1$.

> Murray e von Neumann demonstraram que ***existe um único factor hiperfinito do tipo*** $\mathbf{II}_1$. (ver Teorema 2.3.2)
>
> McDuff demonstrou que ***a família dos factores do tipo*** $\mathbf{II}_1$, ***a menos de isomorfismo, tem cardinalidade superior ao numerável***.

Exemplo 1.3.14. [**Um factor do tipo $\mathbf{II}_\infty$**]

Um factor M é do tipo $\mathbf{II}_\infty$ se não for do tipo $\mathbf{II}_1$ mas contém um elemento p tal que pMp é factor do tipo $\mathbf{II}_1$.

$$R_{0,1} = \mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_\infty$$

é um factor do tipo $\mathbf{II}_\infty$, onde $\mathbf{R}$ é o factor hiperfinito do tipo $\mathbf{II}_1$.

Definição 1.3.15. ***Factor do tipo*** $\mathbf{III}$ *é todo o factor que não é do tipo* $\mathbf{I}$ *nem do tipo* $\mathbf{II}$*, i.e., não admite projecções finitas não-nulas. Estes factores classificam-se em tipos* $\mathbf{III}_\lambda$ *com* $\lambda \in [0, 1]$ *(ver [2, 3]).*

Observação 1.3.16. *No que respeita aos factores do tipo* $\mathbf{III}$ *atente-se à Observação 2.2.4.*

A abordagem fundamental

Proposição 1.3.17. *Seja* $A \subseteq L(H)$ *uma álgebra-*C^* *com unidade. Todo o elemento de* A *exprime-se como combinação linear de quatro operadores unitários de* A*.*

Demonstração. Seja $x \in A$. Então x admite a decomposição cartesiana

$$x = x_1 + ix_2, \tag{1.1}$$

onde x_1 e x_2 são operadores auto-adjuntos de A.

Ora, se $x \in A$ é um unitário auto-adjunto, i.e., $x = x^* \in A$ e $\|x\| \leq 1$, então

$$x = \frac{1}{2}\left[\left\{x + i\left(1 - x^2\right)^{1/2}\right\} + \left\{x - i\left(1 - x^2\right)^{1/2}\right\}\right]$$

é uma expressão de x como a média de dois operadores unitários. Sendo estes operadores unitários funções contínuas de x, vem que pertencem à álgebra-C^* gerada por x e por 1, pelo que pertencem a A.

Um qualquer elemento $x \in A \setminus \{0\}$ escreve-se como $x = \|x\| (x/ \|x\|)$, sendo $(x/ \|x\|)$ um operador unitário de A. Assim, atendendo à decomposição cartesiana (1.1), sai o resultado.

□

A noção de álgebra vN é absolutamente fundamental. Uma álgebra vN caracteriza as ***simetrias de um grupo***. Vejamos como:

Teorema 1.3.18. *Uma **álgebra vN** é um conjunto na forma $M = \pi(G)'$, onde π é uma representação unitária de um grupo G num espaço Hilbert H, e S' denota o comutante de $S \subseteq \mathbf{L}(H)$.*

Demonstração. A definição usual para álgebra vN é:

$$M \text{ é sub-álgebra auto-adjunta de } \mathbf{L}(H) \text{ tal que } M = M''.$$

Se $M = \pi(G)'$ então M é uma sub-álgebra auto-adjunta e $M = M''$, visto que $S' = S'''$ para todo $S \subseteq \mathbf{L}(H)$.

Reciprocamente, se $M = M''$ é uma sub-álgebra auto-adjunta, podemos fazer G coincidir com o grupo unitário de M'. Assim, de acordo com a Proposição 1.3.17, G gera linearmente M', pelo que $G' = (M')'$.

□

Observação 1.3.19. ***A essência numa álgebra vN.***

Sabemos que sendo $M = \pi(G)'$ uma álgebra vN, como

$$S' = \left\{x' \in L(H) : x'x = xx', \text{ para todo o } x \in S\right\},$$

vem que, para uma qualquer representação unitária $\pi : G \to L(H) \supseteq M$,

$$x \in M \Longleftrightarrow x\pi(g) = \pi(g)x, \text{ para todo o } g \in G.$$

Consequentemente, se $u \in M$ é um operador unitário vem que

$$u\pi_g u^* = \pi_g, \text{ para todo o } g \in G,$$

onde fazemos $\pi_g \equiv \pi(g)$.

Se tivermos uma acção $\alpha : G \to Aut(M)$ e uma família de geradores unitários de M, $\{u_g\}_{g \in G}$, vem que a identificação

$$u_g x u_g^* = \alpha_g(x), \text{ com } x \in M \text{ e } g \in G,$$

é uma possibilidade estrutural bastante forte, quase uma exigência!...

A representação padrão

Sejam M um factor e $lin : M \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo, i.e., $lin(aa^*) = lin(a^*a) \in \mathbb{R}_0^+$, para todo $a \in M$. A existência de lin é garantida pelo teorema de Hahn-Banach. Devido à abstração de encarar M como espaço Banach sempre podemos dar a M a estrutura de um espaço pré-Hilbert usando a construção GNS. Seja como for, $\langle a, b\rangle = lin(ab^*)$. Denotamos por $L^2(M, lin)$ o espaço Hilbert completado de (M, lin) e por $||.||_2$ a norma de $L^2(M, lin)$, a saber: $\|a\| = \sqrt{lin(aa^*)}$, para todo $a \in M$.

Como $\|a\| = \|a^*\|$ vem que $M \ni a \overset{J}{\longmapsto} a^* \in M$ pode estender-se únicamente à **isometria linear conjugada** em $L^2(M, lin)$. Se caracterizarmos essa extensão por $J : L^2(M, lin) \to L^2(M, lin)$, vem que $\langle Ja, Jb\rangle = \langle b, a\rangle$, para cada $a, b \in L^2(M, lin)$.

Para cada $a \in M$, seja $\lambda_a(b) = ab$, para cada $b \in M$. Como $\|\lambda_a(b)\| \leq \|a\| . \|b\|_2$, para cada $b \in M$, vem que λ_a pode estender-se unicamente a $L^2(M, lin)$, ainda designada por λ_a, ou simplesmente por a.

Obtém-se assim uma representação fiel-$*$ de M em $L^2(M, lin)$, em que $\lambda(M)$ é uma álgebra de von Neumann, pois lin é uma aplicação fracamente contínua pela forma como se definiu. Esta representação toma o nome de **representação padrão de** M.

Quando o factor em causa é do tipo $\mathbf{II}_1$, o *traço* - que é único! - é o funcional linear de eleição. As propriedades de continuidade do traço, tr, são tais que a álgebra de operadores sobre $L^2(M, tr)$ definido por multiplicação esquerda por M já é fracamente fechado, pelo que M actua sobre $L^2(M, tr)$ como uma álgebra vN. Esta acção toma o nome de **forma padrão de** M. É importante perceber que a simetria das operações à esquerda e à direita é implementada pela isometria linear conjugada J. De facto, dados $\xi \in L^2(M, tr)$ e $a \in M$, vem que $\xi a = Ja^*J\xi$, pelo que $JMJ = M'$.

Teorema 1.3.20. *Seja $J : L^2(M) \to L^2(M)$ a isometria linear conjugada, aplicação que prolonga $M \overset{x \mapsto x^*}{\longrightarrow} M$. Então, JMJ é o comutante de M em $\mathbf{L}\left(L^2(M)\right)$, sendo que temos $JMJ = End_M\left(L^2(M)\right)$.*

Demonstração. Sejam $x, y, z \in M$. Por definição de J temos que

$$JxJy = (xy^*)^* = yx^* = yJx.$$

Aplicando este resultado duas vezes, vem que

$$JxJyz = yzJx = yJxJz.$$

Fazendo $z = \mathbf{1}$, vem que

$$(JxJ)\, y = y\, (JxJ).$$

Então, $JMJ \subseteq M'$, onde $M' = End_M\left(L^2(M)\right)$.
Seja agora $a \in M'$. Por definição de operador adjunto, vem que

$$\langle y^*x^*, a\rangle = \langle x^*, ya\rangle = \langle x^*, ay\rangle = \langle a^*x^*, y\rangle = \langle x^*a^*, y\rangle = \langle a^*, xy\rangle.$$

Ora,

$$\langle J\eta, \theta\rangle = \overline{\langle \eta, J\theta\rangle}, \text{ para cada } \eta, \theta \in L^2(M),$$

pelo que

$$\overline{\langle xy, Ja \rangle} = \langle y^* x^*, a \rangle = \overline{\langle xy, a^* \rangle},$$

concluindo-se que $Ja = a^*$. O primeiro cálculo permite-nos concluir que $JM'J \subseteq M''$. Tomando adjuntos, vem que $M' \subseteq JM''J$.

Pelo teorema do bicomutante, Teorema 1.2.30 , vem que $M' = JMJ$.

□

Capítulo 2

Acções sobre álgebras de von Neumann

2.1 Acções

Referências: [5, 22, 23, 25]

Dada uma acção $\widetilde{\alpha} : G \to Perm(M)$ é importante respeitar a estrutura de M. Assim, quando M não é um simples espaço sem estrutura e sim um grupo ou um anel, por exemplo, devemos substituir uma acção $\widetilde{\alpha}$ por uma acção $\widehat{\alpha} : G \to Aut_0(M)$, onde $Aut_0(M)$ é o conjunto dos automorfismos de M. Quando o espaço M é uma álgebra de von Neumann as acções a considerar devem respeitar a estrutura de M. Posto isto, devemos substituir a acção $\widehat{\alpha}$, que não tem que respeitar a involução ou topologias, por uma acção $\alpha : G \to Aut(M)$, onde $Aut(M)$ é o conjunto dos automorfismos-$*$ de M e α é uma aplicação contínua quando fixamos em M uma topologia $\tau \prec t.norma$. De acordo com o que já se discutiu, *uma acção sobre álgebras de von Neumann constitui uma família de automorfismos-$*$ indexada no grupo-domínio*.

Observação 2.1.1. *Muitas vezes tem interesse trabalhar com operadores unitários simbólicos. Quando em presença de uma álgebra de von Neumann M, identificamos com $\mathcal{U}(M)$ a família de operadores unitários de M, que constitui um grupo. Muitas vezes não temos uma álgebra de suporte e consideramos apenas um grupo de símbolos, denotado $\mathcal{U}$.*

Definição 2.1.2. *Dizemos que estamos em presença de uma* ***representação unitária*** *sempre que temos um homomorfismo de grupos $u : G \to \mathcal{U}$. Quando em presença de uma álgebra de operadores M é costume fazer $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(M)$, onde $\mathcal{U}(M)$ é o grupo dos operadores unitários de M. Dado um $\mathcal{U}$ abstracto, é usual fazer a identificação $u_g^* \equiv u_{g^{-1}}$, para cada $g \in G$.por $Aut(S)$, conjunto dos automorfismos de S em S. Isto é, não estamos interessados em apenas permutar os elementos de S;* ***as permutações devem respeitar a estrutura de*** *S. Há autores que neste contexto fazem uso do conceito de* ***caracter****.*

Definição 2.1.3. *Sejam G um grupo e M uma álgebra de von Neumann. Dizemos que uma acção $\alpha : G \to Aut(M)$ é uma* ***acção regular*** *se existe uma representação unitária $u : G \to \mathcal{U}$ tal que*

$$\alpha_g(x) = u_g x u_g^*, \text{ para cada } x \in M. \tag{2.1}$$

É usual fazer as identificações $Ad_{u_g}(x) \equiv Ad\left(u_g, x\right) \equiv u_g x u_g^*$

Observação 2.1.4. *Para um melhor entendimento do alcance do conceito de acção regular, atente-se ao Corolário 2.2.8 e à Observação 1.3.19.*

Definição 2.1.5. *Seja $\varphi \in Aut(M)$ um automorfismo-$*$ sobre uma álgebra de von Neumann M. Então, φ é um **automorfismo livre** se tivermos*

$$\begin{array}{c} \underbrace{xy = \varphi(y)x, \text{ para todo } x \in M} \\ \Downarrow \\ y = 0 \text{ ou } \varphi = \text{identidade} \end{array} \tag{2.2}$$

Definição 2.1.6. *Seja $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção sobre uma álgebra de von Neumann M. Então, α é uma **acção livre** se $\{\alpha_g \equiv \alpha(g)\}_{g \in G \setminus \{1\}}$ for uma família de automorfismos livres.*

Observação 2.1.7. *O **conceito de acção livre** foi criado em 1940 por John von Neumann, como instrumento para a construção de factores. John von Neumann definiu este conceito no quadro das álgebras abelianas de von Neumann. Em 1968, Kallman generaliza este conceito para uma qualquer álgebra de von Neumann.*

Definição 2.1.8. *Sejam M uma álgebra de von Neumann e $\varphi \in Aut(M)$ um automorfismo$-*$. Então, φ é um **automorfismo interno** se existir um operador unitário $u \in \mathcal{U}(M)$ tal que $\varphi(x) = uxu^*$, para todo o $x \in M$.*

Definição 2.1.9. *Sejam M uma álgebra de von Neumann e $\varphi \in Aut(M)$ um automorfismo$-*$. Então, φ é um **automorfismo externo** se φ não é automorfismo interno, i.e., qualquer que seja a representação unitária $u : G \to \mathcal{U}$*

$$\begin{array}{c} \underbrace{\varphi(x) = u_g x u_g^*, \text{ para todo } x \in M} \\ \Downarrow \\ u_g \notin M \end{array}$$

Observação 2.1.10. *Na prática, para provarmos que um determinado automorfismo é externo começamos por admitir que o mesmo é interno, com o objectivo de chegarmos a um absurdo.*

Definição 2.1.11. *Sejam M uma álgebra de von Neumann e $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção. α é uma **acção interna** se $\{\alpha_g \equiv \alpha(g)\}_{g \in G}$ for uma família de automorfismos internos, i.e., existe uma representação unitária $u : G \to \mathcal{U}(M)$ tal que α é uma acção regular, i.e., para cada $x \in M$ temos que $\alpha_g(x) = u_g x u_g^*$, com $u_g \in \mathcal{U}(M)$.*

Definição 2.1.12. *Sejam M uma álgebra de von Neumann e $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção. α é uma **acção externa** se $\{\alpha_g \equiv \alpha(g)\}_{g \in G \setminus \{1\}}$ for uma família de automorfismos externos, i.e., qualquer que seja a representação unitária $u : G \to \mathcal{U}(M)$*

$$\begin{array}{c} \underbrace{\alpha_g(x) = u_g x u_g^*, \text{ para todo } x \in M} \\ \Downarrow \\ g = 1 = \text{elemento neutro de } G \end{array}$$

Definição 2.1.13. *A **álgebra fixa por uma acção** $\alpha : G \to Aut(M)$, onde M é uma álgebra de von Neumann, é a álgebra de von Neumann dada por*

$$M^G = \{x \in M : \ \alpha_g(x) = x, \text{para cada } g \in G\}$$

Observação 2.1.14. *A álgebra de von Neumann fixa por uma acção $\alpha : G \to Aut(M)$ também é denotada por M^{α}.*

Definição 2.1.15. *Seja M uma álgebra de von Neumann e seja $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção . A acção α diz-se **acção ergódica** se $M^G = \mathbb{C}id$.*

Teorema 2.1.16. *Sejam M uma álgebra de von Neumann e $\varphi \in Aut(M)$ um automorfismo livre. Então, φ é um automorfismo externo.*

Demonstração. Seja $\varphi \in Aut(M)$ um automorfismo livre. Se $\varphi = identidade$ nada há a dizer. Considere-se então, SPG que $\varphi \neq identidade$ e seja u um operador unitário. *Admita-se, com vista a um absurdo, que o automorfismo livre φ é um automorfismo interno,* i.e.,

$$u \in M,$$

ou seja, $u \in \mathcal{U}\,(M)$. Como φ é um automorfismo livre, a condição

$$ux = \varphi(x)u, \text{ para todo } x \in M$$

conduz-nos, por aplicação de (2.2), ao *absurdo*

$$u \in \mathcal{U}\,(M) \qquad \& \qquad u = 0.$$

Logo, $u \notin M$. Conclui-se assim que

$$\underbrace{ux = \varphi(x)u, \text{ para todo } x \in M}_{\substack{\Downarrow \\ u \notin M}},$$

ou seja, φ é um automorfismo externo.

□

Teorema 2.1.17. *Sejam M uma factor e $\varphi \in Aut(M)$ um automorfismo externo. Então, φ é um automorfismo livre.*

Demonstração. Sendo φ um automorfismo externo, vem que $\varphi \neq identidade$.
Seja $x \in M$ e admita-se que

$$\varphi(y)x = xy, \text{ para cada } y \in M. \tag{2.3}$$

Se x for unitário, multiplicando à esquerda e à direita por x^*, vem que

$$yx^* = x^*\varphi(y), \text{ para cada } y \in M. \tag{2.4}$$

Considerando a Proposição 1.3.17 vem que se tivermos (2.3) também temos (2.4) para um qualquer $x \in M$, não necessariamente unitário. Considerando φ^{-1} e identificando y por $\varphi^{-1}(y)$, em (2.3) e em (2.4), respectivamente, vem que

$$yx = x\varphi^{-1}(y), \text{ para cada } y \in M \tag{2.5}$$

e que

$$\varphi^{-1}(y)x^* = x^*y, \text{ para cada } y \in M. \tag{2.6}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
(x^*x)y &= x^*(xy) \underset{\substack{\uparrow \\ (2.3)}}{=} x^*(\varphi(y)x) \\
&= (x^*\varphi(y))x \underset{\substack{\uparrow \\ (2.4)}}{=} (yx^*)x \\
&= y(x^*x), \text{ para cada } y \in M
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
(xx^*)y &= x(x^*y) \underset{\substack{\uparrow \\ (2.6)}}{=} x(\varphi^{-1}(y)x^*) \\
&= (x\varphi^{-1}(y))x^* \underset{\substack{\uparrow \\ (2.5)}}{=} (yx)x^* \\
&= y(xx^*), \text{ para cada } y \in M.
\end{aligned}$$

Logo,

$$x^*x, xx^* \in M'.$$

Sendo M um factor, vem que

$$x^*x, xx^* \in \mathbb{C}(id).$$

Assim, x^*x e xx^* são escalares positivos. Reescalando x para que seja um unitário, vem que

$$\varphi(y) = xyx^*, \text{ para cada } y \in M.$$

Mas isto quer dizer que φ é um automorfismo interno, o que é *absurdo*, a não ser que

$$x^*x = 0 \text{ ou } xx^* = 0, \text{ i.e. } ,x = 0.$$

Assim, com M factor e $\varphi \in Aut(M)$ externo vem que

$$\begin{gathered}
\underbrace{\varphi(y)x = xy, \text{ para todo } y \in M} \\
\Downarrow \\
x = 0
\end{gathered}$$

Logo, φ é um automorfismo livre.

□

Corolário 2.1.18. *Sejam M uma álgebra de von Neumann e $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção livre. Então, α é uma acção externa.*

Demonstração. Uma acção é uma família de automorfismos. Numa acção livre, todos os automorfismos, à excepção da identidade, são automorfismos livres. Basta então aplicar o Teorema 2.1.16.

□

Corolário 2.1.19. *Sejam M uma factor e $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção externa. Então, α é uma acção livre.*

Demonstração. Uma acção é uma família de automorfismos. Numa acção externa, todos os automorfismos, à excepção da identidade, são automorfismos externos. Basta então aplicar o Teorema 2.1.17.

□

2.2 Produto cruzado

Referências: [5, 19, 20, 21, 25, 31, 32, 35, 36]

Produto cruzado como produto semi-directo

Seguindo **Turumaru** (ver [36]) vamos definir o produto cruzado $M \rtimes_\alpha G$ entre uma álgebra de von Neumann $(M, \{0_M, 1_M, +, \times\})$ e um *grupo numerável* $(G, \{1_G, \cdot\})$, sendo que $\alpha : G \to Aut(M)$ é uma acção e tr_M é um traço fiel normal sobre M. Dada uma sucessão quase-nula (x_g), com $g \in G$, considere-se $\sum\limits_{g \in G} x_g \otimes g$, onde $x_g \otimes g$ são elementos simbólicos a precisar mais adiante. Convém lembrar que uma sucessão (x_g) é quase-nula se $x_g = 0_M$, excepto para um número finito de g's. Seja

$$A = \left\{ \sum_{g \in G} x_g \otimes g : (x_g) \text{ é sucessão quase-nula em } M \right\}.$$

As operações a definir sobre A são as seguintes:

1. [Soma vectorial] $\left(\sum\limits_{g \in G} x_g \otimes g \right) + \left(\sum\limits_{g \in G} y_g \otimes g \right) = \sum\limits_{g \in G} (x_g + y_g) \otimes g$

2. [Produto escalar] $\xi \left(\sum\limits_{g \in G} x_g \otimes g \right) = \left(\sum\limits_{g \in G} (\xi x_g) \otimes g \right)$, com ξ escalar

3. [Produto vectorial] $\left(\sum\limits_{g \in G} x_g \otimes g \right) \times \left(\sum\limits_{h \in G} y_h \otimes h \right) = \sum\limits_{g,h \in G} \alpha_h (x_g)\, y_h \otimes gh$

4. [Involução] $\left(\sum\limits_{g \in G} x_g \otimes g \right)^* = \sum\limits_{g \in G} \alpha_{g^{-1}} \left(x_g^* \right) \otimes g^{-1}$

   Conclui-se, sem dificuldade, que A é uma álgebra-$*$ com estas operações. Com as identificações $g \longleftrightarrow 1_M \otimes g$ e $x \longleftrightarrow x \otimes 1_G$ vem que $1_M \otimes 1_G$ é elemento neutro em M e em G. O traço tr_M pode prolongar-se a tr_A como se segue:

5. $tr_A (x_g \otimes g) = tr_M (x_g)$, quando $g = 1_G$ e $tr_A (x_g \otimes g) = 0$, quando $g \neq 1_G$.

6. $tr_A\left(\sum_{g\in G} x_g\otimes g\right)=\sum_{g\in G} tr_A\left(x_g\otimes g\right)$.

Turumaru provou que tr_A é fiel em A e definiu o **produto cruzado** $M\rtimes_\alpha G$ como o fecho fraco de A.

Combinando 5 e 6 vem que

$$tr_A\left(\sum_{g\in G} x_g\otimes g\right)=tr_M\left(x_{1_G}\right).$$

Exemplo 2.2.1. *Sejam $M=\mathbb{C}$ e $\alpha: G\to Aut(M)$, $g\mapsto \alpha_g=id$ para todo $g\in G$. Então, $M\rtimes_\alpha G=\mathbb{C}\left[G\right]$, onde $\mathbb{C}\left[G\right]$ é a álgebra de grupo.*

Observação 2.2.2. *Em 1955, quando Turumaru definiu o produto cruzado foi no quadro mais geral das álgebras-C*. O importante desta incursão foi a percepção do papel da topologia. De facto, a única diferença consiste em dizer que o produto cruzado $M\rtimes_\alpha G$, quando M é uma álgebra-C*, é o fecho de A na topologia da norma do operador.*

Produto cruzado contínuo

O produto cruzado de álgebras-C* com grupos contínuos foi estudado pela primeira vez por S. Doplicher, D. Kastler e D. Robinson. Na descrição deste produto, designaram as álgebras resultantes de **álgebras covariantes**. Estas álgebras servem para descrever simetrias e evoluções temporais.

Definição 2.2.3. ***Produto cruzado***

Sejam:
$M\subseteq \mathbf{L}(H)$ uma álgebra de von Neumann,
G um grupo localmente compacto,
dg *a* medida esquerda de Haar em G,
$\alpha: G\to Aut(M)$ uma acção,
$\alpha_g\equiv\alpha(g)\in Aut(M)$ um automorfismo-$*$ indexado em G,
$G\ni g\longmapsto \alpha_g\in Aut(M)$ uma aplicação contínua para a topologia τ em M,
$\tau\prec t.norma$.

Considere-se o espaço
$K(G,H)=\{f: G\to H \mid f$ tem suporte compacto,
f é contínua para a topologia da norma$\}$.

Defina-se em $K(G,H)$ o produto interno

$$\langle f_1,f_2\rangle=\int_G\langle f_1(g),f_2(g)\rangle\,dg$$

e denote-se por

$$L^2(G,H)$$

o espaço Hilbert obtido por completação.

Para cada $x \in M$, para cada $g, h \in G$ e para cada $\xi \in L^2(G, H)$ definam-se os operadores $t_\alpha(x),\ u_g \in \mathbf{L}(L^2(G, H))$ por

1. $(t_\alpha(x)\xi)(h) = \alpha_h^{-1}(x)\xi(h)$,
2. $(u_g\xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$,
3. $u_g^* = u_{g^{-1}}$

A álgebra de von Neumann gerada em $\mathbf{L}(L^2(G, H))$ pelos operadores $t_\alpha(x)$ e u_g ($x \in M$ e $g \in G$) é o **produto cruzado de** M **por** G **via** α, denotado $M \rtimes_\alpha G$.

Consolidando notações, temos que

$$M \rtimes_\alpha G = \left\{t_\alpha(x), u_g\right\}''_{x\in M,\, g\in G}$$

onde

$$\alpha \in Hom(G, Aut(M)) \text{ e } \alpha \text{ é contínua-}(\cdot, \tau), \text{ com } \tau \prec t.norma.$$

Observação 2.2.4. *Sejam M um factor do tipo* **III** *e $\mathbb{R} \equiv (\mathbb{R}, \{+, 0\})$. Então, existe N, factor do tipo* **II**, *e $\alpha : \mathbb{R} \to Aut(N)$ tal que $M = N \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ (ver [2, 3]). Esquematicamente,*

$$\mathbf{III} = \mathbf{II} \rtimes_\alpha \mathbb{R}.$$

Proposição 2.2.5. *A aplicação $t_\alpha : M \to M \rtimes_\alpha G$ é linear.*

Demonstração. Basta considerar a propriedade **1** da Definição 2.2.3 e o facto de α_g, para cada $g \in G$, ser um automorfismo.

□

Observação 2.2.6. *Podemos olhar para M como uma sub-álgebra de $M \rtimes_\alpha G$. Como uma qualquer álgebra-C^* é gerada por operadores unitários (ver Proposição 1.3.17) para um qualquer elemento $x \in M \rtimes_\alpha G$ existe uma única sucessão G-mensurável sobre M, denotada (x_g), tal que*

$$x = \int_G t_\alpha\left(x_g\right) u_g dg, \text{ onde } u_g \in \mathcal{U}\left(M \rtimes_\alpha G\right), \text{ podendo acontecer que } u_g \notin \mathcal{U}\left(M\right).$$

Teorema 2.2.7. $u_g t_\alpha(x) u_g^* = t_\alpha(\alpha_g(x))$

Demonstração. Sejam $x \in M$, $g, h \in G$ e $\xi \in L^2(G, H)$. Então,

$$\begin{aligned}
[u_g t_\alpha(x) u_g^* \xi](h) &= \{u_g[t_\alpha(x) u_{g^{-1}}\xi]\}(h) = \{t_\alpha(x)[u_{g^{-1}}\xi]\}(g^{-1}h) \\
&= \alpha_{g^{-1}h}^{-1}(x)[(u_{g^{-1}}\xi)(g^{-1}h)] = \alpha_{g^{-1}h}^{-1}(x)\{\xi[g(g^{-1}h)]\} \\
&= \alpha_{g^{-1}h}^{-1}(x)\xi(h)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\{t_\alpha[\alpha_g(x)]\xi\}(h) &= \{[\alpha_h^{-1}(\alpha_g(x))]\xi\}(h) = [\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x))\xi](h) \\
&= (\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_g)(x)\xi(h) = \alpha_{h^{-1}g}(x)\xi(h) \\
&= \alpha^{-1}_{g^{-1}h}(x)\xi(h)
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.8. *Seja $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção. Sempre que for possível considerar o produto cruzado $M \rtimes_\alpha G$ a acção α é regular.*

Demonstração. Basta verificar que o Teorema 2.2.7 é a implementação de uma acção regular.

□

Observação 2.2.9. *Se G for contável então o produto cruzado de Turumaru e o produto cruzado de Doplicher coincidem.*

Teorema 2.2.10. *Considere-se o produto cruzado $M \rtimes_\alpha G$, onde G é contável, e seja $x = \sum_{g \in G} x_g u_g \in M \rtimes_\alpha G$. Então*

1. $x \in t_\alpha(M)' \iff yx_g = x_g\alpha_g(y)$, para cada $y \in M$ e para cada $g \in G$
2. $x \in u(G)' \iff \alpha_g\left(x_{g^{-1}t}\right) = x_{tg^{-1}}$, para cada $g, t \in G$

Demonstração. Seja $y \in M$. De acordo com o esquema de Turumaru

$$\begin{aligned}
t_\alpha(y) &= y \otimes 1_G, \\
u_g &= 1_M \otimes g, \\
1_{M \rtimes_\alpha G} &= 1_M \otimes 1_G,
\end{aligned}$$

pelo que podemos usar as identificações

$$\begin{aligned}
G &\ni g \longleftrightarrow 1_M \otimes g \in M \rtimes_\alpha G, \\
M &\ni x \longleftrightarrow x \otimes 1_G \in M \rtimes_\alpha G
\end{aligned}$$

(**1**) Temos que,

$$t_\alpha(y)x = \sum_{g \in G} t_\alpha(y)x_g u_g$$

e que

$$xt_\alpha(y) = \left(\sum_{g \in G} x_g u_g\right) t_\alpha(y) = \sum_{g \in G} x_g u_g t_\alpha(y) = \sum_{g \in G} x_g t_\alpha\left(\alpha_g(y)\right) u_g$$

Assim,

$$t_\alpha(y)x_g = x_g t_\alpha\left(\alpha_g(y)\right), \text{ para cada } y \in M \text{ e para cada } g \in G.$$

Pelas identificações vem que

$$yx_g = x_g\alpha_g\left(y\right), \text{ para cada } y \in M \text{ e para cada } g \in G.$$

(**2**) Temos que

$$\begin{aligned}
u_g x &= u_g \sum_{h\in G} x_h u_h = \sum_{h\in G} \left(u_g x_h\right) u_h \\
&= \sum_{h\in G} \left(u_g x_h\right) u_h = \sum_{h\in G} \alpha_g\left(x_h\right) u_{gh} \\
&= \sum_{t\in G} \alpha_g\left(x_{g^{-1}t}\right) u_t
\end{aligned}$$

e que

$$xu_g = \left(\sum_{h\in G} x_h u_h\right) u_g = \sum_{h\in G} x_h u_{hg} = \sum_{t\in G} x_{tg^{-1}} u_t$$

Logo,

$$\alpha_g\left(x_{g^{-1}t}\right) = x_{tg^{-1}}, \text{ para cada } g,t \in G$$

□

Teorema 2.2.11. *Sejam G um grupo finito e M um factor do tipo* $\mathbf{II}_1$. *Então,* $\alpha : G \to Aut(M)$ *é uma acção externa se e só se* $t_\alpha\left(M'\right) \cap \left(M \rtimes_\alpha G\right) = \mathbb{C}id_{M\rtimes_\alpha G}$.

Demonstração. Admita-se, com vista a um absurdo, que α é uma acção interna, ou seja, $\alpha_g = Ad(u)$, para certo unitário $u \in \mathcal{U}(M)$ e um certo $g \in G\backslash\{1\}$. Então, pelo detalhe da demonstração do Teorema 2.1.17 vem que $u^*u_g \in M'$. Por construção, $t_\alpha\left(u^*u_g\right) \in M \rtimes_\alpha G$. Logo, $t_\alpha\left(u^*u_g\right) \in t_\alpha\left(M'\right) \cap \left(M \rtimes_\alpha G\right)$. Mas, $t_\alpha\left(u^*u_g\right) \notin \mathbb{C}id_{M\rtimes_\alpha G}$.
Reciprocamente, admita-se que α é uma acção externa. Se

$$\sum_{g\in G} x_g u_g \in t_\alpha\left(M'\right) \cap \left(M \rtimes_\alpha G\right),$$

vem que

$$x_g\alpha_g(x) = xx_g, \text{ para todo } g \in G.$$

Com $g = 1$ vem que $x_1 \in \mathbb{C}$. Com $g \neq 1$, vem que $x_g = 0$, pelo Teorema 2.1.17.

□

Teorema 2.2.12. *Sejam M um factor e* α *uma acção externa dum grupo G sobre M. Então,* $M \rtimes_\alpha G$ *é um factor.*

Demonstração. Vejamos primeiro que se M é um factor então, $M \rtimes_\alpha G$ é um factor. Como M é um factor e α uma acção externa, pelo Teorema 2.2.11, vem que

$$\mathbb{C}id_{M\rtimes_\alpha G} = t_\alpha\left(M'\right) \cap (M \rtimes_\alpha G)$$

Usando a Proposição 1.2.23 vem que

$$t_\alpha(M) \subseteq M \rtimes_\alpha G \text{ implica que } t_\alpha\left(M'\right) \supseteq M' \rtimes_\alpha G,$$

pelo que

$$\mathbb{C}id_{M\rtimes_\alpha G} \supseteq \left(M' \rtimes_\alpha G\right) \cap (M \rtimes_\alpha G).$$

Ora,

$$\left(M' \rtimes_\alpha G\right) \equiv (M \rtimes_\alpha G)'.$$

Trivialmente temos que

$$\mathbb{C}id_{M\rtimes_\alpha G} \subseteq (M \rtimes_\alpha G)' \cap (M \rtimes_\alpha G),$$

pelo que

$$(M \rtimes_\alpha G)' \cap (M \rtimes_\alpha G) = \mathbb{C}id_{M\rtimes_\alpha G}.$$

Logo,

$$M \text{ factor} \Longrightarrow M \rtimes_\alpha G \text{ factor.}$$

□

Teorema 2.2.13. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e α uma acção externa dum grupo finito G sobre M. Então, $M \rtimes_\alpha G$ é um factor do tipo $\mathbf{II}_1$.*

Demonstração. Considere-se o esquema de Turumaru e as identificações

$$\begin{array}{ccc} g & \longleftrightarrow & 1_M \otimes g, \\ x & \longleftrightarrow & x \otimes 1_G. \end{array}$$

Como G é finito o esquema de Turumaru está bem definido. Assim, dado

$$x = \left(\sum_{g\in G} x_g \otimes g\right) \in M \rtimes_\alpha G$$

o seu traço é caracterizado por

$$tr_{M\rtimes_\alpha G}(x) = tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(\sum_{g\in G} x_g \otimes g\right) = tr_M\left(x_{1_G}\right).$$

Assim, $tr_{M\rtimes_\alpha G}$ herda, eventualmente, as propriedades de tr_M. Vejamos que assim é. Dados

$$\begin{array}{rcl} x & = & \left(\sum_{g\in G} x_g \otimes g\right), \\ y & = & \left(\sum_{g\in G} y_g \otimes g\right) \end{array}$$

vem que
$$xy = \sum_{g,h\in G} \alpha_h\left(x_g\right) y_h \otimes gh.$$
Assim,
$$\begin{aligned} tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(xy\right) &= tr_M\left(\sum_{g,h\in G}\alpha_h\left(x_g\right)y_h\right)_{gh=1} = tr_M\left(\sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}\left(x_g\right)y_{g^{-1}}\right) \\ &= \sum_{g\in G} tr_M\left(\alpha_{g^{-1}}\left(x_g\right)y_{g^{-1}}\right) \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(yx\right) &= tr_M\left(\sum_{g,h\in G}\alpha_h\left(y_g\right)x_h\right)_{gh=1} = tr_M\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\left(y_{g^{-1}}\right)x_g\right) \\ &= \sum_{g\in G} tr_M\left(\alpha_g\left(y_{g^{-1}}\right)x_g\right) = \sum_{g\in G} tr_M\left(\alpha_{g^{-1}}\left(x_g\right)y_{g^{-1}}\right) \\ &= tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(xy\right). \end{aligned}$$
Por outro lado,
$$\begin{aligned} tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(x^*\right) &= tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(\sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}\left(x_g^*\right)\otimes g^{-1}\right) \\ &= tr_M\left(\sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}\left(x_g^*\right)\right)_{g=1} = tr_M\left(x_1^*\right), \end{aligned}$$
pelo que
$$\begin{aligned} tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(xx^*\right) &= tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(\left(\sum_{g\in G}x_g\otimes g\right)\left(\sum_{g\in G}x_g\otimes g\right)^*\right) \\ &= tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(\left(\sum_{g\in G}x_g\otimes g\right)\left(\sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}\left(x_g^*\right)\otimes g^{-1}\right)\right) \\ &= tr_M\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\left(x_g\right)\alpha_{g^{-1}}\left(x_g^*\right)\right) \geq 0 \end{aligned}$$
Assim,
$$tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(xx^*\right) = 0 \text{ implica que } x_g = 0, \text{ para cada } g \in G.$$
Conclui-se que $tr_{M\rtimes_\alpha G}$ é traço em $M \rtimes_\alpha G$. Sendo M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ vem que tr_M toma todos os valores de $[0,1]$. Assim, $M \rtimes_\alpha G$ não é factor do tipo **I**. Ora,
$$tr_{M\rtimes_\alpha G}\left(1_{M\rtimes_\alpha G}\right) = tr_M\left(1_M\right) < \infty,$$
pelo que $M \rtimes_\alpha G$ é finito. Logo,

$$M \text{ factor } \mathbf{II}_1 \text{ e } G \text{ finito} \Longrightarrow M \rtimes_\alpha G \text{ factor } \mathbf{II}_1.$$

□

Observação 2.2.14. *A noção de produto cruzado para grupos contínuos não é tão transparente como para o caso discreto, onde é possível dar a forma de um elemento genérico.*

Produto cruzado discreto

Sejam:

$M \subseteq \mathbf{L}(H)$ uma álgebra de von Neumann,
G um grupo discreto, .i.e., um grupo com a topologia discreta,
G é um conjunto contável,
e o elemento neutro do grupo G,
$\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção,
$\alpha_g \equiv \alpha(g) \in Aut(M)$ um automorfismo-$*$ indexado em G,
$\{\xi_g : g \in G\}$ a base ortonormada do espaço Hilbert $l^2_G(\mathbb{C})$,
$\xi_g(h) = \delta^h_g$, onde $\delta^h_g = 1$ se $g = h$ e $\delta^h_g = 0$ se $g \neq h$, com $g, h \in G$,
$\xi \in l^2_G(\mathbb{C})$,
$\widetilde{H} = \underset{t \in G}{\oplus} H_t$, onde $H_t = H$ para todo o t.

Observação 2.2.15. *Quando se considera G com a topologia discreta, a aplicação*

$$\alpha : G \to Aut(M)$$

será sempre contínua, independentemente da topologia em M.

Observação 2.2.16. [**Construção do produto cruzado** $M \rtimes_\alpha G$] *$\widetilde{H}$ é um espaço Hilbert, por construção, e um elemento $\widetilde{\xi} \in \widetilde{H}$ é uma aplicação*

$$\widetilde{\xi} : G \to H \text{ tal que } \sum_{t \in G} ||\widetilde{\xi}(t)||^2 < \infty.$$

Com $\xi \in H$, $t \in G$ defina-se

$$\widetilde{\xi}^{(t)}(s) \equiv \widetilde{\xi}^{(t)}_s = \delta^t_s \xi.$$

Há uma identificação natural dada por

$$\widetilde{H} \cong H \otimes l^2_G(\mathbb{C}), \text{ onde } \widetilde{\xi}^{(t)} \longleftrightarrow \xi \otimes \xi_t.$$

Em particular, $\{\widetilde{\xi}^{(t)}_s : s, t \in G\}$ é a base ortonormada de $\widetilde{H}$. Se $\widetilde{x} \in L(\widetilde{H})$, então,

para cada $s, t \in G$ temos que $\widetilde{x}(s, t)$ é o único operador limitado de H

satisfazendo

$$\langle \widetilde{x}(s,t)\xi, \eta \rangle = \left\langle \widetilde{x}\widetilde{\xi}^{(t)}, \widetilde{\eta}^{(s)} \right\rangle, \text{ para todos } \xi, \eta \in H.$$

O conjunto

$$\widetilde{M}=\left\{\widetilde{x}\in\mathbf{L}(\widetilde{H}):M\ni\widetilde{x}\,(s,t)=\alpha_{t^{-1}}\left(\widetilde{x}\left(st^{-1},e\right)\right),\text{com }s,t\in G\right\}$$

é o **produto cruzado de** M **por** G **via** α*, denotado* $M\rtimes_\alpha G$*. Por construção, vê-se que* $M\rtimes_\alpha G$ *é somável para a topologia* $t.\sigma-fraca$ *em* M*. Temos que*

$$\widetilde{x}\,(su,tu)=\alpha_{u^{-1}}\left(\widetilde{x}\,(s,t)\right),\text{com }\widetilde{x}\in\widetilde{M}\text{ e }s,t,u\in G.$$

Assim, conclui-se, sem dificuldade, que $\widetilde{M}$ *é uma sub-álgebra auto-adjunta de* $\mathbf{L}(\widetilde{H})$ *e contém a identidade. Logo,* $M\rtimes_\alpha G$ **é uma álgebra** vN **de operadores sobre** $\widetilde{H}$*. Defina-se*

$$t_\alpha:M\to\widetilde{M},$$

por

$$(t_\alpha(x))(s,t)=\delta_s^t\alpha_{t^{-1}}(x),\text{com }x\in M\text{ e }s,t\in G.$$

Assim, t_α *é um isomorfismo-$*$ de* M *em* $\widetilde{M}$*. Logo,* $t_\alpha(M)$ *é uma sub-álgebra* vN *de* $\widetilde{M}$*, sendo o conjunto dos pontos* $\widetilde{x}\in\widetilde{M}$ *tais que* $\widetilde{x}(s,t)=0$ *quando* $s\neq t$*.*

Definição 2.2.17. ***Representação regular esquerda*** *é toda a aplicação* $\lambda:G\to l^2_G(\mathbb{C})$*,* $g\mapsto\lambda_g$*, definida por* $\lambda_g(\xi)(h)=\xi(g^{-1}h)$*.*

Proposição 2.2.18. *Temos que* $\lambda_{gh}=\lambda_g\lambda_h$ *e que* $\lambda_g\xi_h=\xi_{gh}$*.*

Demonstração. Dados $g,h,t\in G$ temos que:

$$\begin{aligned}\lambda_{gh}(\xi)(t)&=\xi((gh)^{-1}t)=\xi(h^{-1}g^{-1}t)\\&=\xi(h^{-1}(g^{-1}t))=\lambda_h(\xi)(g^{-1}t)\\&=\lambda_g\lambda_h(\xi)(t)\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}\lambda_g\xi_h(t)&=\lambda_g(\xi_h)(t)=\xi_h(g^{-1}t)\\&=\delta_h^{g^{-1}t}=\delta_{gh}^t=\xi_{gh}(t)\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.19. *A representação regular esquerda é unitária, i.e.,* $\lambda_g^*=\lambda_{g^{-1}}$*.*

Demonstração. Considerando o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ no espaço Hilbert $l^2_G(\mathbb{C})$ temos que:

$$\left\langle\xi,\lambda_g^*(\xi_h)\right\rangle=\langle\lambda_g(\xi),\xi_h\rangle=\sum_{s\in G}\xi(g^{-1}s)\delta_h^s=\xi(g^{-1}h),$$

e que

$$\left\langle\xi,\lambda_{g^{-1}}(\xi_h)\right\rangle=\sum_{s\in G}\xi(s)\xi_h(gs).$$

Fazendo $t = gs$, vem que $s = g^{-1}t$. Como G é grupo, quando s percorre G vem que t percorre G. Assim,

$$\left\langle \xi, \lambda_{g^{-1}}(\xi_h) \right\rangle = \sum_{t \in G} \xi(g^{-1}t)\xi_h(t) = \sum_{t \in G} \xi(g^{-1}t)\delta_h^t = \xi(g^{-1}h).$$

Logo,

$$\lambda_g^* = \lambda_{g^{-1}}.$$

□

Definição 2.2.20. ***Representação regular direita*** *é toda a aplicação $\rho : G \to l^2_G(\mathbb{C})$, $g \mapsto \rho_g$, definida por $\rho_g(\xi)(h) = \xi(hg)$.*

Proposição 2.2.21. *Temos que $\rho_{gh} = \rho_g\rho_h$, $\rho_g\xi_h = \xi_{hg^{-1}}$ e $\lambda_g\rho_h = \rho_h\lambda_g$.*

Demonstração. Dados $g, h, t \in G$ temos que:

$$\rho_{gh}(\xi)(t) = \xi(tgh) = \rho_h(\xi)(tg) = \rho_g\rho_h(\xi)(t),$$

que

$$\rho_g\xi_h(t) = \rho_g(\xi_h)(t) = \xi_h(tg) = \delta_h^{tg} = \delta_{hg^{-1}}^t = \delta_t^{hg^{-1}} = \xi_{hg^{-1}}(t)$$

e que

$$\lambda_g\rho_h(\xi)(t) = \rho_h(\xi)(g^{-1}t) = \xi(g^{-1}th) = \lambda_g(\xi)(th) = \rho_h\lambda_g(\xi)(t).$$

□

Teorema 2.2.22. *A representação regular direita é unitária, i.e., $\rho_g^* = \rho_{g^{-1}}$.*

Demonstração. Considerando o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no Hilbert $l^2_G(\mathbb{C})$ temos que:

$$\left\langle \xi, \rho_g^*(\xi_h) \right\rangle = \left\langle \rho_g(\xi), \xi_h \right\rangle = \sum_{s \in G} \xi(sg)\delta_h^s = \xi(hg),$$

e que

$$\left\langle \xi, \rho_{g^{-1}}(\xi_h) \right\rangle = \sum_{s \in G} \xi(s)\xi_h(sg^{-1}).$$

Fazendo $t = sg^{-1}$, vem que $s = tg$. Como G é grupo, quando s percorre G vem que t percorre G. Assim,

$$\left\langle \xi, \rho_{g^{-1}}(\xi_h) \right\rangle = \sum_{t \in G} \xi(tg)\xi_h(t) = \sum_{t \in G} \xi(tg)\delta_h^t = \xi(hg).$$

Logo,

$$\rho_g^* = \rho_{g^{-1}}.$$

□

Lema 2.2.23. $(t_\alpha(M) \cup \lambda(G))'' \subseteq M \rtimes_\alpha G$.

Demonstração. Defina-se $\lambda : G \to \mathbf{L}(\widetilde{H})$ fazendo $(\lambda(u))(s,t) = \delta_s^{ut}$, ou, de modo equivalente

$$(\lambda(u)\widetilde{\xi})(t) = \widetilde{\xi}(u^{-1}t).$$

Assim, λ é uma representação regular esquerda de G em $\widetilde{M}$; e logo uma representação unitária. Com a identificação $\widetilde{H} \cong H \otimes l_G^2(\mathbb{C})$,

$$\lambda(u) = \mathbf{1} \otimes \lambda_u.$$

Assim, $\lambda(G) \subseteq \widetilde{M}$ e

$$\lambda(u)t_\alpha(x)\lambda(u)^* = t_\alpha(\alpha_u(x)), \text{ para todo } u \in G \text{ e } x \in M.$$

Conclui-se que

$$(t_\alpha(M) \cup \lambda(G))'' \subseteq M \rtimes_\alpha G.$$

$\square$

Teorema 2.2.24. $M \rtimes_\alpha G = (t_\alpha(M) \cup \lambda(G))''$.

Demonstração. Já vimos que $(t_\alpha(M) \cup \lambda(G))'' \subseteq M \rtimes_\alpha G$.

Agora basta verificar que

$$M \rtimes_\alpha G \subseteq (t_\alpha(M) \cup \lambda(G))''.$$

[Consultar exercício 4.1.3 em [32], pg 117]

$\square$

Proposição 2.2.25. *Sejam G um grupo finito e $\alpha : G \to l_G^\infty(\mathbb{C})$ uma representação regular esquerda. Então,*

$$l_G^\infty(\mathbb{C}) \rtimes_\alpha G \simeq Mat_{|G| \times |G|}(\mathbb{C}).$$

Demonstração. Uma matriz $M = [m_{ij}] \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ é um espaço vectorial de dimensão $n \times n$ em que a base canónica é constituída pelas matrizes elementares $e_{ij} = [\delta_{ij}] \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, onde δ_{ij} é o clássico δ de Kronecker. No que se segue iremos fazer $\delta_{ij} \equiv \delta_i^j$, por questões de legibilidade.

Para a família das matrizes elementares $\{e_{ij}\}$, vulgarmente denominadas **matrizes da unidade**, valem as seguintes propriedades:

1. $e_{ij}^* = e_{ji}$

2. $\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = I_n$

3. $e_{ij}e_{kl} = \delta_k^j e_{il}$

A propriedade 1 prende-se com o cálculo da matriz transconjugada, ou involução; a propriedade 2 prende-se com o *traço*; a propriedade 3 prende-se com o produto vectorial de álgebras. Naturalmente que $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ é uma álgebra-$*$.

As três propriedades acima caracterizam integralmente a família $\{e_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$, i.e., se tivermos uma família de elementos de $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ satisfazendo as propriedades 1, 2 e 3, vem que estes elementos são caracterizados por $e_{ij} = [\delta_{ij}]$.

Posto isto, vem que a forma mais simples de provar o pretendido consiste em definir uma base ortonormada $\{e_{g,h}\}_{g,h\in G}$ para $l^\infty_G(\mathbb{C}) \rtimes_\alpha G$ e verificar os seus elementos satisfazem as 3 propriedades acima.

Seja então $\left\{\xi_g\right\}_{g\in G}$ a base o.n. de $l^\infty_G(\mathbb{C})$ caracterizada por $\xi_g(h) = \delta^h_g$ e faça-se

$$e_{g,h} = t_\alpha\left(\xi_g\right) u_{gh^{-1}}, \text{ com } g,h \in G,$$

onde t_α e u_g são conforme o estabelecido na definição 2.2.3. Assim,

$$e_{g,h} \in l^\infty_G(\mathbb{C}) \rtimes_\alpha G.$$

Temos que provar que $\{e_{g,h}\}_{g,h\in G}$ gera a álgebra de von Neumann $l^\infty_G(\mathbb{C}) \rtimes_\alpha G$. Para o efeito, devemos mostrar que conseguimos gerar os elementos geradores de $l^\infty_G(\mathbb{C}) \rtimes_\alpha G$, a saber:

$$\{t_\alpha(x), u_g\}, \text{ com } x \in l^\infty_G(\mathbb{C}) \text{ e } g \in G.$$

Como $|G| < \infty$ vem que $l^\infty_G(\mathbb{C})$ tem dimensão finita, pelo que todas as topologias de operadores coincidem. Assim sendo, a álgebra de von Neumann $l^\infty_G(\mathbb{C}) \rtimes_\alpha G$ é uma álgebra-C*.

Para cada $x \in l^\infty_G(\mathbb{C})$ existe uma sequência $G-$mensurável (x_g) tal que $x = \sum\limits_{g\in G} x_g\xi_g$. Atendendo à Proposição 2.2.5 vem que

$$\begin{aligned} t_\alpha(x) &= \sum_{g\in G} x_g t_\alpha\left(\xi_g\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{1} \text{ é elemento neutro de } G \\ u_{\mathbf{1}} \text{ é elemento neutro de } M\rtimes_\alpha G}}{=} \sum_{g\in G} x_g t_\alpha\left(\xi_g\right) u_{\mathbf{1}} \\ &= \sum_{g\in G} x_g t_\alpha\left(\xi_g\right) u_{gg^{-1}} = \sum_{g\in G} x_g e_{g,g}. \end{aligned}$$

Designando por id a identidade de $l^\infty_G(\mathbb{C})$ vem que $t_\alpha(id) = u_{\mathbf{1}}$. Sem qualquer dificuldade constata-se que $id = \sum\limits_{g\in G} \xi_g$. Posto isto, vem que

$$\begin{aligned} u_g &= t_\alpha(id)\, u_g = \sum_{h\in G} t_\alpha(\xi_h)\, u_g = \sum_{h\in G} t_\alpha(\xi_h)\, u_{hh^{-1}g} \\ &= \sum_{h\in G} t_\alpha(\xi_h)\, u_{h\left(g^{-1}h\right)^{-1}} = \sum_{h\in G} e_{h,g^{-1}h}. \end{aligned}$$

Logo, $\{e_{g,h}\}_{g,h\in G}$ gera a álgebra de von Neumann $l_G^\infty(\mathbb{C}) \rtimes_\alpha G$. Resta-nos demonstrar que $\{e_{g,h}\}_{g,h\in G}$ satisfaz o mesmo tipo de relações que as matrizes da unidade de $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, onde $n = |G|$. Temos que

$$\begin{aligned} e_{g,h}^* &= \left(t_\alpha\left(\xi_g\right) u_{gh^{-1}}\right)^* = \left(u_{gh^{-1}}\right)^* \left(t_\alpha\left(\xi_g\right)\right)^* = u_{\left(gh^{-1}\right)^{-1}} t_\alpha\left(\xi_g^*\right) \\ &= u_{hg^{-1}} t_\alpha\left(\xi_g\right) = t_\alpha\left(\alpha_{hg^{-1}}\left(\xi_g\right)\right) u_{hg^{-1}} \end{aligned}$$

Ora, $\alpha \in Aut\left(l_G^\infty(\mathbb{C})\right)$, pelo que α transforma operadores unitários em operadores unitários. Assim, $\alpha_{hg^{-1}}\left(\xi_g\right)$ é um operador unitário, pelo que

$$\begin{aligned} \alpha_{hg^{-1}}\left(\xi_g\right)(k) &= \xi_g\left(\left(hg^{-1}\right)^{-1} k\right) = \xi_g\left(gh^{-1}k\right) \\ &= \delta_g^{gh^{-1}k} = \delta_{hg^{-1}g}^k = \delta_h^k = \xi_h(k). \end{aligned}$$

Conclui-se assim que

$$e_{g,h}^* = t_\alpha(\xi_h) u_{hg^{-1}} = e_{h,g}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{g\in G} e_{g,g} &= \sum_{g\in G} t_\alpha\left(\xi_g\right) u_{gg^{-1}} = \sum_{g\in G} t_\alpha\left(\xi_g\right) u_{\mathbf{1}} \\ &= \sum_{g\in G} t_\alpha\left(\xi_g\right) = t_\alpha\left(\sum_{g\in G} \xi_g\right) = t_\alpha(id). \end{aligned}$$

Sendo t_α um homomorfismo, vem que

$$\sum_{g\in G} e_{g,g} \text{ designa a identidade em } l_G^\infty(\mathbb{C}) \rtimes_\alpha G.$$

Temos que

$$e_{g,h}e_{k,l} = t_\alpha\left(\xi_g\right) u_{gh^{-1}} t_\alpha(\xi_k) u_{kl^{-1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema 2.2.7}}}{=} t_\alpha\left(\xi_g\right) t_\alpha\left(\alpha_{gh^{-1}}(\xi_k)\right) u_{gh^{-1}} u_{kl^{-1}}$$

Como

$$\alpha_{gh^{-1}}(\xi_k)(s) = \xi_k\left(hg^{-1}s\right) = \delta_k^{hg^{-1}s} = \delta_{gh^{-1}k}^s = \xi_{gh^{-1}k}(s)$$

vem que

$$e_{g,h}e_{k,l} = t_\alpha\left(\xi_g\right) t_\alpha\left(\xi_{gh^{-1}k}\right) u_{gh^{-1}} u_{kl^{-1}} = t_\alpha\left(\xi_g \xi_{gh^{-1}k}\right) u_{gh^{-1}} u_{kl^{-1}}.$$

Como

$$\xi_g \xi_{gh^{-1}k} = \delta_g^{gh^{-1}k} = \delta_{hg^{-1}g}^k = \delta_h^k$$

vem que

$$\begin{aligned} e_{g,h} e_{k,l} &= \delta_h^k t_\alpha \left(\xi_g \xi_{gh^{-1}k} \right) u_{gh^{-1}} u_{kl^{-1}} \\ &= \delta_h^k t_\alpha \left(\xi_g \xi_g \right) u_{gh^{-1}kl^{-1}} \\ &= \delta_h^k t_\alpha \left(\xi_g \right) u_{gl^{-1}} = \delta_h^k e_{g,l} \end{aligned}$$

Pelo que foi dito sai o resultado.

□

Observação 2.2.26. $\left[\textbf{Representa\textit{ções} unitárias de } \widetilde{H}\right]$

Dada a álgebra de von Neumann $M \subseteq \mathbf{L}(H)$, o espaço Hilbert $\widetilde{H}$ sobre o qual $\widetilde{M}$ será representado tem três descrições, unitáriamente equivalentes:

(1) $\widetilde{H} = l_G^2(H) = \left\{ G \xrightarrow{\xi} H : \sum\limits_{t \in G} \|\xi(t)\|^2 < \infty \right\}$;

(2) $\widetilde{H} = H \otimes l_G^2(\mathbb{C})$;

(3) $\widetilde{H} = \bigoplus\limits_{t \in G} H = \left\{ ((\xi\,(t)))_{t \in G} : \sum\limits_{t \in G} \|\xi(t)\|^2 < \infty \right\}$.

A descrição (1) é uma reposição directa do caso geral abstracto, já apresentado; a descrição (2) é a que foi utilizada na discusão do caso discreto.

Na descrição (3) pensamos num elemento de $\widetilde{H}$ como um vector coluna com entradas em H, com uma norma quadrática somável. Esta descrição é útil pela simplicidade que nos é oferecida no cálculo matricial. Neste formato, um qualquer operador limitado $\widetilde{x} \in \mathbf{L}(\widetilde{H})$ é representado por uma matriz $\widetilde{x} = ((\widetilde{x}(s,t)))_{s,t \in G}$, onde $\widetilde{x}(s,t) \in \mathbf{L}(H)$ para todo $s, t \in G$, e $(\widetilde{x}\widetilde{\xi})(s) = \sum\limits_{t \in G} \widetilde{x}(s,t)\widetilde{\xi}(t)$, sendo a soma da direita interpretada como a norma limite da sucessão generalizada de somas finitas. Nesta linguagem, fica claro que

$$(\pi_\alpha(x))(s,t) = \delta_s^t \alpha_{t^{-1}}(x), \qquad (\lambda(u))(s,t) = \delta_s^{ut} \qquad \text{onde } x \in M \text{ e } u, s, t \in G.$$

Observação 2.2.27. *Na década de 1980 Vaughan F. R. Jones prova que* ***qualquer grupo finito tem acções livres sobre o factor hiperfinito*** $\mathbf{II}_1$ ***de von Neumann, denotado*** $\mathbf{R}$. *Este facto marca a diferença entre a teoria das representações de grupos e a teoria das acções sobre* $\mathbf{R}$. *Para além disso, Jones prova que* ***dadas duas acções livres de qualquer grupo finito*** G ***sobre*** $\mathbf{R}$, ***elas estão na mesma classe de conjugação***, *onde, por definição, duas acções* α *e* β *são conjugadas se existe* $\theta \in Aut(\mathbf{R})$ *tal que* $\theta \circ \alpha_g \circ \theta^{-1} = \beta_g$ *para todo* $g \in G$. *Logo,* ***a construção do produto cruzado não depende da acção exterior***.

2.3 Construção de uma álgebra hiperfinita R do tipo $\mathbf{II}_1$

Referências: [15, 16]

Comecemos por considerar as matrizes $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, onde $n \in \mathbb{N}$.

É claro que se $\mathbf{M} = \mathbf{L}(H)$, com $dim(H) < \infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{M} \simeq Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. Considerando $\simeq$ podemos associar a cada operador de **M** uma única matriz de $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Proceda-se à definição do **traço**, Tr.

Assim, dado $K \subseteq H$,

$$p \in proj_{\mathbf{K}} \Longleftrightarrow p \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C}), p = p^* = p^2, p\,(H) = K$$

Conclui-se assim que se $dim(H) = n$,

$$p_H = (\delta_{ii}) = \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow Tr(p_H) = n = \dim(p_H).$$

Ora,

$$p = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow Tr(p) = n-1$$

$$\vdots$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow Tr(p) = 1$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} Tr : \mathcal{P}_{\mathbf{M}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto Tr(p). \end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{M} \simeq Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ vem que

$$Tr(\mathcal{P}_{\mathbf{M}}) = \{0, 1, 2, \cdots, n-1, n\}.$$

Normalizamos o traço fazendo

$$tr(p) = Tr(p)/Tr(\mathbf{1}).$$

Assim,

$$tr(\mathcal{P}_{\mathbf{M}}) = \{0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \cdots, \tfrac{n-1}{n}, 1\} \subseteq [0,1]$$

Vejamos agora como se pode construir uma cadeia ascendente

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots.$$

Se fizermos

$$\begin{aligned} &M_0 = \mathbb{C} \\ &M_1 = Mat_{2\times 2}(\mathbb{C}) \\ &M_2 = Mat_{2^2\times 2^2}(\mathbb{C}) \\ &\quad\vdots \\ &M_n = Mat_{2^n\times 2^n}(\mathbb{C}) \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

não existe qualquer relação de inclusão entre M_i e M_j, $i \neq j$. Por isso vamos criar uma aplicação de *inclusão*, ι_k, que mergulha M_{k-1} em M_k.

Assim,

$$a \overset{\iota_1}{\longmapsto} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\iota_2}{\longmapsto} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \overset{\iota_3}{\longmapsto} \begin{bmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & g & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & j & k & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & n & o & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & f & g & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

pelo que $\iota_k : M_{k-1} \longmapsto M_k$. Assim,

$$a \in M_{k-1} \implies \iota_k(a) \in M_k.$$

Observação 2.3.1. *Simplifica-se significaticamente a descrição acima se recorrermos ao* ***produto tensorial*** *(ver Definição A.1.49). Assim, temos que*

$$\begin{aligned} \iota_n : M_{n-1} &\to M_n \\ A &\mapsto A \otimes I_2 \end{aligned}$$

Com estes elementos todos, vem que

$$\mathbf{R}_0 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} M_i$$

constiui um bom candidato a álgebra-$*$. Dado $x \in \mathbf{R}_0$, $tr(x)$ está bem definido, pois $x \in M_i$, para algum i. E se tivermos

$$x \in M_i,$$
$$y \in M_{i+m}$$

devemos fazer

$$x \cdot y := (\iota_{i+m} \circ \cdots \circ \iota_i)(x) \cdot y$$

e

$$y \cdot x := y \cdot (\iota_{i+m} \circ \cdots \circ \iota_i)(x).$$

O traço, $tr : \mathbf{R}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$, é fiel, i.e., $tr(x \cdot x^*) = 0 \implies x = 0$.
Se fizermos

$$\langle x, y \rangle = tr(x \cdot y^*)$$

munimos $\mathbf{R}_0$ com a estrutura de espaço pré-Hilbert. De acordo com a construção GNS, $\mathbf{R}_0$ é uma álgebra-$*$. Por sinal, $\mathbf{R}_0$ tem dimensão infinita. Temos que

$$L^2(\mathbf{R}_0) = \overline{(\mathbf{R}_0, \langle , \rangle)}^{completado}.$$

Assim $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0''$ é a álgebra de von Neumann em $\mathbf{L}(L^2(\mathbf{R}_0))$, gerada por $\mathbf{R}_0$.
A construção ora concretizada chega ao mesmo resultado se na edificação da cadeia ascendente

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

fizermos

$$\begin{aligned}
M_0 &= \mathbb{C}\\
M_1 &= Mat_{p \times p}(\mathbb{C})\\
M_2 &= Mat_{p^2 \times p^2}(\mathbb{C})\\
&\vdots\\
M_n &= Mat_{p^{n-1} \times p^{n-1}}(\mathbb{C})\\
&\vdots
\end{aligned}$$

para todo o $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Uma outra generalização desta construção passa por generalizar também a inclusão.

Considere-se uma sucessão $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e um $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tais que $\beta_i p^i | \beta_{i+1} p^{i+1}$. Faça-se agora:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \mathbb{C}\\
M_1 &= Mat_{\beta_1 p \times \beta_1 p}(\mathbb{C})\\
M_2 &= Mat_{\beta_2 p^2 \times \beta_2 p^2}(\mathbb{C})\\
&\vdots\\
M_n &= Mat_{\beta_n p^n \times \beta_n p^n}(\mathbb{C})\\
&\vdots
\end{aligned}$$

A função inclusão vem então dada por:

$$\begin{aligned} \iota_n : M_{n-1} &\to M_n \\ A &\mapsto A \otimes I_{\beta_n} \end{aligned}$$

Teorema 2.3.2. [**Murray − von Neumann**] *Seja* $\widetilde{\mathbf{R}}$ *uma álgebra de von Neumann hiperfinita do tipo* $\mathbf{II}_1$*. Então,* $\widetilde{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{R}$.

Demonstração. Ver [16], capítulo 12. □

Teorema 2.3.3. *[Algumas propriedades de* **R***]*

a) **R** *é hiperfinita.*
b) $tr : \mathcal{P}_{\mathbf{R}} \longrightarrow [0,1]$ *é uma aplicação sobrejectiva.*
c) **R** *é factor do tipo* $\mathbf{II}_1$*.*
d) Se $N \subseteq \mathbf{R}$ *e* N *é subfactor de* **R***, então* $N \simeq Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$ *ou* $N \simeq \mathbf{R}$.

Demonstração. *a)* e *c)* resultam directamente da definição de **R**.
b)

$$tr(\mathcal{P}_{\mathbf{R}_0}) \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \cdots, \tfrac{n-1}{n}, 1\}.$$

Dados $x \in [0,1]$ e $\varepsilon > 0$ existem $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ tais que

$$\begin{aligned} \tfrac{k}{n} \leq x \leq \tfrac{k+1}{n}, \\ \tfrac{1}{n} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Basta considerar um número racional $y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ tal que $x - y \leq \varepsilon/2$, fazer $n = [1/\varepsilon] + 1$, e fazer $k = yn$.

Como

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \cdots, \tfrac{n-1}{n}, 1\right\}} = [0,1],$$

sai o resultado.
d) Ver [2]. □

2.4 Construção de uma acção externa sobre R

Referências: [2, 5]

Sejam $n \geq 2$ e $A_n = Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. Uma outra forma equivalente de construir **R** consiste em fazer $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_0)''$, onde $\mathbf{R}_0 = \bigotimes_{\mathbb{N}} (A_n)$. Esta abordagem tem a vantagem de permitir a construção da acção externa de um grupo finito sobre **R**.

Seja $\left\{e^x_y\right\}$ a família das matrizes da unidade de A_n. Valem as seguintes propriedades:

1. $e^x_y e^v_w = \delta^y_v e^x_w$

2. $\left(e^x_y\right)^* = e^y_x$

3. $\sum\limits_x e^x_x = I_n$

Observação 2.4.1. *Seja G um grupo finito tal que $|G| = n$. Então, pela correspondência biunívoca entre $\{1, 2, \cdots, n\}$ e G podemos substituir a indexação em $\{1, 2, \cdots, n\}$ pela indexação em G, na caracterização de A_n. Dito de outra forma,* ***a acção de** G **em** $\{1, 2, \cdots, n\}$ **induz uma acção de** G **em** A_n.*

Proposição 2.4.2. *Seja G um grupo finito tal que $|G| = n$. Então, G actua sobre A_n por translação esquerda, i.e., $g \bullet e^x_y = e^{gx}_{gy}$, para cada $g, x, y \in G$.*

Demonstração. Veja-se primeiro que $\bullet$ é uma acção. Temos que

$$1 \bullet e^x_y = e^{1\cdot x}_{1\cdot y} = e^x_y$$

e que

$$g \bullet \left(h \bullet e^x_y\right) = g \bullet e^{hx}_{hy} = e^{g(hx)}_{g(hy)} = e^{(gh)x}_{(gh)y} = (gh) \bullet e^x_y.$$

Vejamos agora que $\bullet$ respeita as propriedades das matrizes da identidade. É suficiente verificar as propriedades 1 e 2. Temos que

$$\begin{aligned} g \bullet \left(e^x_y e^v_w\right) &= g \bullet \left(\delta^y_v e^x_w\right) = \delta^y_v e^{gx}_{gw} = \delta^{gy}_{gv} e^{gx}_{gw} \\ &= e^{gx}_{gy} e^{gv}_{gw} = \left(g \bullet e^x_y\right)\left(g \bullet e^v_w\right) \end{aligned}$$

e que

$$g \bullet \left(e^x_y\right)^* = g \bullet e^y_x = e^{gy}_{gx} = \left(e^{gx}_{gy}\right)^* = \left(g \bullet e^x_y\right)^*$$

□

Definição 2.4.3. *Seja $\alpha : G \to Aut(A_n)$ a acção por translação esquerda, i.e.,*

$$\alpha_g\left(e^x_y\right) \equiv g \bullet e^x_y := e^{gx}_{gy}.$$

Definição 2.4.4. *Dado $g \in G$ faça-se*

$$r_g := \sum_{x \in G} e^{gx}_x.$$

Proposição 2.4.5. *A acção caracterizada por $g \bullet e^x_y = e^{gx}_{gy}$ é tal que $g \mapsto r_g$ define uma representação unitária de G em A_n.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} r_g r_h &= \left(\sum_{x\in G} e_x^{gx}\right)\left(\sum_{y\in G} e_y^{hy}\right) = \sum_{x,y\in G} e_x^{gx} e_y^{hy} \\ &= \sum_{x,y\in G} \delta_{hy}^{x} e_y^{gx} = \sum_{y\in G} e_y^{ghy} = \sum_{y\in G} e_y^{(gh)y} = r_{gh}, \end{aligned}$$

que

$$r_1 = \sum_{x\in G} e_x^x = I_n;$$

e que

$$\begin{aligned} (r_g)^* &= \left(\sum_{x\in G} e_x^{gx}\right)^* = \sum_{x\in G} \left(e_x^{gx}\right)^* = \sum_{x\in G} e_{gx}^{x} \\ &= \sum_{gx\in G} e_{gx}^{g^{-1}(gx)} = \sum_{y\in G} e_y^{g^{-1}y} = r_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

Logo, $\{r_g\}_{g\in G}$ é uma família de operadores unitários, e $g \mapsto r_g$ define uma representação unitária de G em A_n

□

Proposição 2.4.6. *Temos que:*

1. $r_g e_y^x r_g^* = \alpha_g\left(e_y^x\right)$
2. $\alpha_g\left(r_h\right) = r_{ghg^{-1}}$
3. $\alpha_g\left(a\right) = r_g a r_g^*$, *com* $a \in A_n$

Demonstração. Por etapas, temos:

(**1**)

$$\begin{aligned} r_g e_y^x r_g^* &= \left(\sum_{s\in G} e_s^{gs}\right) e_y^x \left(\sum_{t\in G} \left(e_t^{gt}\right)^*\right) = \sum_{s,t\in G} e_s^{gs} e_y^x e_{gt}^t \\ &= \sum_{s,t\in G} \delta_x^s e_y^{gs} e_{gt}^t = \sum_{s,t\in G} \delta_s^x \delta_t^y e_{gt}^{gs} = e_{gy}^{gx} = \alpha_g\left(e_y^x\right) \end{aligned}$$

(**2**)

$$\begin{aligned}\alpha_g(r_h) &= \alpha_g\left(\sum_{y\in G} e_y^{hy}\right) = \sum_{y\in G}\alpha_g\left(e_y^{hy}\right) = \sum_{y\in G} e_{gy}^{ghy}\\ &= \sum_{gy\in G} e_{gy}^{(ghg^{-1})gy} = \sum_{z\in G} e_z^{(ghg^{-1})z} = r_{ghg^{-1}}\end{aligned}$$

(**3**)
É imediato a partir do ponto 1, por linearidade.

□

Teorema 2.4.7. *$\widetilde{\alpha} := \bigotimes_{\mathbb{N}}(\alpha)$ é uma acção externa de G em $\mathbf{R}$.*

Demonstração. Comecemos por ilustrar a edificação de $\widetilde{\alpha}$. Sabemos que $\alpha : G \to Aut(A_n)$.

Faça-se

$B_0 = \mathbb{C}$
$B_1 = A_n$
$B_2 = A_n \otimes A_n$
$\vdots$
$B_k = \underbrace{A_n \otimes \cdots \otimes A_n}_{k \text{ vezes}}$
$\vdots,$

$\alpha_1 \equiv \alpha$ e $\alpha_k = \underbrace{\alpha \otimes \cdots \otimes \alpha}_{k \text{ vezes}}$

Assim,

$$\alpha_1 : G \to Aut(B_1), \alpha_2 : G \to Aut(B_2), \cdots, \alpha_k : G \to Aut(B_k), \cdots$$

As inclusões constroem-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\iota_k : B_{k-1} &\to B_k\\ x &\mapsto x \otimes I_n\end{aligned}$$

para cada $k \geq 1$.
Naturalmente que $B_k = A_{n^k}$, para cada $k \geq 1$.
Temos, sem qualquer dificuldade, que

$$\iota_p \circ \alpha_q = \alpha_{pq}$$

e

$$\widetilde{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

Sejam $a, b \in B_k$ e estudemos a *equação fundamental*

$$ab = \widetilde{\alpha}(b)a.$$

Para um qualquer $a \in B_k$ basta-nos que os elementos $b \in B_k$ sejam elementos unitários. Sejam então

$$a = \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k \\ y_1,\cdots,y_k}} a^{x_1,\cdots,x_k}_{y_1,\cdots,y_k} \left(e^{x_1}_{y_1} \otimes \cdots \otimes e^{x_k}_{y_k}\right)$$

e

$$b = e^{w_1}_{z_1} \otimes \cdots \otimes e^{w_k}_{z_k}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} ab &= \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k \\ y_1,\cdots,y_k}} a^{x_1,\cdots,x_k}_{y_1,\cdots,y_k} \left(e^{x_1}_{y_1} \otimes \cdots \otimes e^{x_k}_{y_k}\right) \left(e^{w_1}_{z_1} \otimes \cdots \otimes e^{w_k}_{z_k}\right) \\ &= \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k \\ y_1,\cdots,y_k}} a^{x_1,\cdots,x_k}_{y_1,\cdots,y_k} \left(e^{x_1}_{y_1} e^{w_1}_{z_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(e^{x_k}_{y_k} e^{w_k}_{z_k}\right) \\ &= \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k \\ y_1,\cdots,y_k}} a^{x_1,\cdots,x_k}_{y_1,\cdots,y_k} \left(\delta^{y_1}_{w_1} \cdots \delta^{y_k}_{w_k}\right) \left(e^{x_1}_{z_1} \otimes \cdots \otimes e^{x_k}_{z_k}\right) \\ &= \sum_{x_1,\cdots,x_k} a^{x_1,\cdots,x_k}_{w_1,\cdots,w_k} \left(e^{x_1}_{z_1} \otimes \cdots \otimes e^{x_k}_{z_k}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\widetilde{\alpha}_g(b) = e^{gw_1}_{gz_1} \otimes \cdots \otimes e^{gw_k}_{gz_k},$$

vem que

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}(b)a &= \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k \\ y_1,\cdots,y_k}} a^{x_1,\cdots,x_k}_{y_1,\cdots,y_k} \left(e^{gw_1}_{gz_1} \otimes \cdots \otimes e^{gw_k}_{z_k}\right) \left(e^{x_1}_{y_1} \otimes \cdots \otimes e^{x_k}_{y_k}\right) \\ &= \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k \\ y_1,\cdots,y_k}} a^{x_1,\cdots,x_k}_{y_1,\cdots,y_k} \left(e^{gw_1}_{gz_1} e^{x_1}_{y_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(e^{gw_k}_{gz_k} e^{x_k}_{y_k}\right) \\ &= \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k \\ y_1,\cdots,y_k}} a^{x_1,\cdots,x_k}_{y_1,\cdots,y_k} \left(\delta^{gz_1}_{x_1} \cdots \delta^{gz_k}_{x_k}\right) \left(e^{gw_1}_{y_1} \otimes \cdots \otimes e^{gw_k}_{y_k}\right) \\ &= \sum_{y_1,\cdots,y_k} a^{gz_1,\cdots,gz_k}_{y_1,\cdots,y_k} \left(e^{gw_1}_{y_1} \otimes \cdots \otimes e^{gw_k}_{y_k}\right). \end{aligned}$$

As operações de soma acima apresentadas estão bem definidas porque o grupo G é finito. Na descrição de ab variam apenas os índices superiores e na descrição de $\widetilde{\alpha}(b)a$ variam apenas os índices inferiores. Para que se verifique a equação fundamental temos que

$$[(x_1, \cdots, x_k) \neq (gw_1, \cdots, gw_k)] \implies \left[a^{x_1,\cdots,x_k}_{w_1,\cdots,w_k} = 0\right].$$

Assim, para que um a satisfaça a equação fundamental para todos os b da forma $b = e_{z_1}^{w_1} \otimes \cdots \otimes e_{z_k}^{w_k}$, só deve ter coeficientes da forma $a_{z_1,\cdots,z_k}^{gz_1,\cdots,gz_k}$, sendo que $z_1 = z_2 = \cdots = z_k$. Então, um a nessas circunstâncias deve ser um múltiplo de $\left(r_g\right)^k$. Por outro lado, a aplicação do traço normalizado às matrizes permite-nos concluir que

$$\|a\|^2 = \frac{1}{n^k} \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_k \\ y_1,\cdots,y_k}} \left|a_{y_1,\cdots,y_k}^{x_1,\cdots,x_k}\right|^2$$

Admita-se, com vista a um absurdo, que $\widetilde{\alpha}$ é uma acção interna.
Seja então $u \in \mathcal{U}(\mathbf{R})$.
Assim, por construção de **R**

$$\text{existe } E = e_{y_1,\cdots,y_k}^{x_1,\cdots,x_k} \in B_k \text{ tal que } \langle u1_{\mathbf{R}}, E\rangle = c \neq 0.$$

A construção de **R** garante-nos também que para um qualquer $\varepsilon > 0$ existe um certo $M \in B_{k+1}$ tal que

$$\|u1_{\mathbf{R}} - M1_{\mathbf{R}}\| < \varepsilon,$$

pelo que

$$\left\| ue_{z_1,\cdots,z_k,z_{k+1}}^{w_1,\cdots,w_k,w_{k+1}} - Me_{z_1,\cdots,z_k,z_{k+1}}^{w_1,\cdots,w_k,w_{k+1}} \right\| < \varepsilon.$$

Por construção, $M = M(\varepsilon)$. Assim, por continuidade, para $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno* temos que

$$|\langle M1_{\mathbf{R}}, E\rangle| > \frac{|c|}{2}.$$

Para cada $b \in R$, a equação fundamental conduz-nos a

$$ub = \widetilde{\alpha}_g(b)\, u.$$

Em particular, este resultado é válido para

$$b = e_{z_1,\cdots,z_k,z_{k+1}}^{w_1,\cdots,w_k,w_{k+1}}.$$

Obtem-se assim a estimativa

$$\left\| Mb - \widetilde{\alpha}_g(b)\, M \right\| \leq 2\varepsilon.$$

De acordo com o estudo feito para a equação fundamental vem que se

$$M = \sum_{\substack{w_1,\cdots,w_{k+1} \\ z_1,\cdots,z_{k+1}}} M_{z_1,\cdots,z_{k+1}}^{w_1,\cdots,w_{k+1}} \left(e_{z_1}^{w_1} \otimes \cdots \otimes e_{z_{k+1}}^{w_{k+1}}\right)$$

então, sempre que $(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}) \neq (gw_1, \cdots, gw_k, gw_{k+1})$, vem que

$$\left| M_{z_1,\cdots,z_{k+1}}^{w_1,\cdots,w_{k+1}} \right|^2 \leq 2\varepsilon,$$

pelo que

$$\|M\|^2 \leq \frac{n^{2k+2}}{n^{k+1}}\left(2\varepsilon\right) = 2n^{k+1}\varepsilon.$$

Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz vem que

$$\left|\langle M1_{\mathbf{R}}, E\rangle\right| \leq \|M\| \leq \sqrt{2n^{k+1}\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$

o que contradiz $\left|\langle M1_{\mathbf{R}}, E\rangle\right| > |c|/2$. Logo, $u \notin \mathcal{U}\left(\mathbf{R}\right)$, pelo que $\widetilde{\alpha}$ é uma acção externa.

$\square$

Capítulo 3

Teoria de Galois não-comutativa

Na teoria de Galois os grupos têm origem na permutação das raízes de equações polinomiais que se transformam no grupo de Galois de uma **extensão**. O grau da extensão é a dimensão do corpo maior como espaço vectorial do corpo menor.

No quadro das álgebras de von Neumann existe também a noção de **dimensão**. Dado um par de factores $N \subseteq M$, define-se o grau da extensão como a dimensão de M como módulo-N esquerdo. A teoria de Galois clássica só admite valores inteiros para o índice $[M : N]$. Quando se trabalha com factores, no conjunto de valores possíveis para o índice temos uma parte discreta e uma parte contínua.

Foi *Vaughan F. R. Jones* que, estando em busca de uma ≪*Teoria de Galois*≫ para factores do tipo $\mathbf{II}_1$, iniciou o estudo dos subfactores para a inclusão $N \subseteq M$.

3.1 Generalidades

Referências: [5, 7, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 34, 37]

Observação 3.1.1. *Em estreita relação com a teoria de comparação de projecções, Murray e von Neumann introduziram o conceito de **função dimensão**. Demonstraram que para um factor M existe uma função dimensão $D : \mathcal{P}_M \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tal que:*

1. $D(p) > 0$ se $p \neq 0$,

2. $D(p) = D(q)$ se e somente se $p \simeq q$,

3. $D(p) \leq D(q)$ se e somente se $p \lesssim q$,

4. $D(p+q) = D(p) + D(q)$ se p e q são projecções ortogonais, isto é $pq = 0$.

Observação 3.1.2. *Seja M um factor finito. Então, existe um único **estado tracial normal fiel** sobre M, i.e., existe um único funcional linear tr sobre M tal que:*

1. (positivo) $tr(x^*x) \geq 0$

2. (traço) $tr(xy) = tr(yx)$, para cada $x, y \in M$;

3. (estado) $tr(\mathbf{1}) = 1$;

4. (fiel) $tr(x^*x) \neq 0$ se $x \neq 0$;

5. (normal) tr é σ-fraco-contínuo;

6. $tr(p) = D(p)$, para todo $p \in \mathcal{P}_M$;

7. $e \sim f \Leftrightarrow tr(e) = tr(f)$, quando $e, f \in \mathcal{P}_M$.

*Por razões óbvias esta função ≪tr≫ toma o nome de **traço**. Utilizando ≪tr≫ define-se $L^2(M, tr)$ como o espaço Hilbert obtido de M com o produto interno $\langle a, b\rangle = tr(b^*a)$. Podemos assim construir a representação padrão de $L^2(M, tr)$, usando o traço. No caso em M é factor do tipo $\mathbf{II}_1$ Murray e von Neumann demonstraram as propriedades **1**, **2**, **3** e **6**.*

Definição 3.1.3. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ uma sub-álgebra vN. A **esperança condicional**, em consonância com [37], é toda a aplicação $\mathcal{E} : M \to N$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $\mathcal{E}(axb) = a\mathcal{E}(x)b$, onde $a, b \in N$ e $x \in M$.

2. $tr(a\mathcal{E}(x)) = tr(ax)$, para $a \in N$ e $x \in M$.

3. $\mathcal{E}(x^*) = \mathcal{E}(x)^*$, para $x \in M$.

4. $\mathcal{E}(x^*x) \geq \mathcal{E}(x)^*\mathcal{E}(x)$, para $x \in M$.

Observação 3.1.4. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ uma sub-álgebra de von Neumann ($id_N = id_M$). Então, $\mathcal{E}_N$ denota a única esperança condicional $\mathcal{E} : M \to N$ que preserva o traço, i.e., $\mathcal{E}_N$ é a restrição a M da projecção ortogonal de $L^2(M, tr)$ sobe $L^2(N, tr)$, que é o fecho de N em $L^2(M, tr)$. Nestas circunstâncias, denotamos esta projecção ortogonal por e_N, ou simplesmente por e. (Ver [37]).*

Observação 3.1.5. *Se $M \rtimes_\alpha G$ se concretiza sobre $L^2(M, tr)$ de forma canónica, então temos que $e = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} u_g$ é a extensão a $L^2(M, tr)$ da esperança condicional $\mathcal{E} : M \to M^G$.*

Teorema 3.1.6. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, G um grupo finito e $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção. Se $\{u_g : g \in G\}$ é a família dos operadores unitários de $M \rtimes_\alpha G$ temos que*

$$e := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u_g$$

é uma projecção de $M \rtimes_\alpha G$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} e^* &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u_g^* = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u_{g^{-1}} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g^{-1}\in G} u_{g^{-1}} \underset{\substack{\uparrow \\ t=g^{-1}}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} u_t = e \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
e^2 &= \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G} u_g u_h = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G} u_{gh} \\
&= \frac{1}{|G|^2}\sum_{gh,h\in G} u_{gh} = \frac{1}{|G|^2}\Big(\sum_{gh\in G} u_{gh}\Big)\sum_{h\in G} 1 \\
&= |G|\,\frac{1}{|G|^2}\sum_{gh\in G} u_{gh} \underset{\substack{\uparrow \\ t=gh}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} u_t = e
\end{aligned}$$

Logo, e é uma projecção de $M \rtimes_\alpha G$.

□

Proposição 3.1.7. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, G um grupo numerável e $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção externa. Então, existe uma representação unitária $u : G \to \mathcal{U}$ tal que a acção α é regular.*

Demonstração. A representação u fica definida por

$$\alpha_g(x)u_h = \alpha_{gh}(x), \text{ para cada } x \in M \text{ e cada } g, h \in G. \tag{3.1}$$

Seja τ o traço de M. Então,

$$\left\langle \alpha_{gh}(x), \alpha_{gh}(y) \right\rangle = \tau\left(\alpha_g(x)\left(\alpha_g(y)\right)^*\right) = \tau\left(xy^*\right) = \left\langle \alpha_g(x), \alpha_g(y) \right\rangle,$$

pelo que u_g é um operador unitário para cada $g \in G$. Como

$$\begin{aligned}
\alpha_g(x)u_h u_t &= \alpha_{gh}(x)u_t = \alpha_{ght}(x) \\
&= \alpha_g(x)u_{ht}, \text{ para cada } x \in M \text{ e cada } g, h, t \in G
\end{aligned}$$

vem que $g \mapsto u_g$ é uma representação unitária de G. Podemos tentar reconstruir (2.1), usando (3.1). Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha_g(x) &= \alpha_{gh}(x)u_h^* = \alpha_{gh}(x)\alpha_{\theta^{-1}}(x)u_h^*(u_h x u_h^*) \\
&= \alpha_{gh}(x)\alpha_{\theta^{-1}h^{-1}}(x)(u_h x u_h^*)
\end{aligned}$$

onde $\theta \in G$ é arbitrário. Basta escolher θ tal que $\theta^{-1}h^{-1} = (gh)^{-1}$, ou seja $\theta = h^{-1}(gh)$. Com $h = g$, vem que (3.1) é concordante com (2.1) e

$$\alpha_h(y)u_g x u_g^* = \alpha_h(y)\alpha_g(x).$$

□

Proposição 3.1.8. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e considere-se uma acção externa $\alpha : G \to Aut(M)$. Então, α é uma acção externa sobre M'.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} x\alpha_g(y) &= xu_g^*yu_g = u_g^*\alpha_{g^{-1}}(x)yu_g = u_g^*y\alpha_{g^{-1}}(x)u_g \\ &= u_g^*yu_gx, \text{ para cada } x \in M \text{ e cada } y \in M'. \end{aligned}$$

Assim, α_g conserva M', ou seja, α_g é um automorfismo regular. Se admitirmos que α_g é um automorfismo interno em M', então

$$u_g^*yu_g = v^*yv, \text{ para cada } y \in M' \text{ e cada } v \in \mathcal{U}(M').$$

Assim, vu_g comuta com cada $y \in M'$, ou seja, $vu_g \in M$, o que é um absurdo, visto que

$$\alpha_g(x) = \omega^*x\omega, \text{ para todo } x \in M,$$

pois $\omega = vu_g^* \in M$.

□

Proposição 3.1.9. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo* $\mathbf{II}_1$ *e $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção externa. Então, $N = M^G$ é uma sub-álgebra de von Neumann de M. Além disso, N' é gerado por M' e por $\{u_g : g \in G\}$.*

Demonstração. Que $N = M^G$ é uma sub-álgebra-$*$ de M é de verificação meramente operativa. Resta a prova do fecho para as operações de continuidade. Estando verificada a continuidade $\alpha : x \mapsto \alpha(x)$ para uma das topologias de von Neumann é trivial concluir que $\overset{\wedge}{\alpha} : x \mapsto (\alpha(x) - x)$ é contínua para essa mesma topologia, por aplicação da Definição 1.1.22.

Seja N_1 a álgebra vN gerada por M' e por $\{u_g : g \in G\}$. É claro que

$$M' \subseteq N_1' \subseteq N'.$$

Aplicando o comutante a esta relação vem que $N \subseteq N_1 \subseteq M$. Então, cada elemento $x \in N_1$ pertence a M e comuta com cada u_g, pelo que $x \in N$, i.e., $N_1 = N$. Assim sendo, vem que $N_1' = N'$.

□

Proposição 3.1.10. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo* $\mathbf{II}_1$*, α uma acção externa e $N = M^G \subseteq M$ um subfactor. Sejam N' um factor finito e tr o traço padrão sobre N'. Então $u_g \perp M'$, i.e., $tr(u_gx) = 0$, para cada $x \in M'$ e para cada $g \in G\backslash\{1\}$.*

Demonstração. Considere-se a esperança condicional $\mathcal{E}$, condicionada por M'. Pela finitude de N', vem que $\mathcal{E}$ projecta N' ortogonalmente sobre M'. Assim, é suficiente provar que $\mathcal{E}(u_g) = 0$, o que acontece pela regularidade de α, ao aplicarmos a relação

$$\mathcal{E}(u_g)\alpha_g(x) = x\mathcal{E}(u_g), \text{ para todo } x \in M'.$$

□

Proposição 3.1.11. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo* $\mathbf{II}_1$*, α uma acção externa. Assim, $\{u_g : g \in G\}$ é uma família linearmente independente sobre M'.*

Demonstração. Devemos mostrar que $M'u_g$ é ortogonal a $M'u_h$, sempre que $g \neq h$, onde N' é um espaço pré-Hilbert em relação ao produto interno pelo traço τ. Para cada $x \in M$ temos que

$$u_g u_h^* x u_h u_g^* = \alpha_{h^{-1}g}(x) = u_{h^{-1}g} x u_{h^{-1}g}^*,$$

pelo que $vx = xv$, i.e.,

$$v \in M', \text{ onde } v = u_{h^{-1}g}^* u_g u_h^*.$$

Pondo

$$c = au_{h^{-1}g} v b^* u_{h^{-1}g}^*, \text{ para } a, b \in M',$$

vem que $u_g u_h^* = u_{h^{-1}g} v$ implica que

$$\tau(au_g u_h^* b^*) = \tau(au_{h^{-1}g} v b^*) = \tau(au_{h^{-1}g} v b^* u_{h^{-1}g}^* u_{h^{-1}g}) = \tau(cu_{h^{-1}g}).$$

Como $c \in M'$, vem, pela Proposição 3.1.10, que $\tau(au_g u_h^* b^*) = 0$, a não ser que $g = h$, provando o pretendido.

□

Proposição 3.1.12. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, α uma acção externa e $N = M^G \subseteq M$ um subfactor. Então, cada elemento $y \in N'$ exprime-se unicamente como*

$$y = x_1 + x_g u_g + \cdots + x_k u_k,$$

onde $x_1, x_g, \cdots, x_k \in M'$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.11 é suficiente mostrar que $\{u_g : g \in G\}$ e M' geram N'. Designando por $\widetilde{M}$ a totalidade das formas que se exprimem como y vem que $\widetilde{M}$ é metricamente fechado em N', sendo uma sub-álgebra de N'. Tomando os comutantes temos que $M \supseteq \widetilde{M} \supseteq N$. Cada $m \in M$ permuta com cada u_g. Assim, m é invariante por G, i.e., $m \in N$. Logo, $\widetilde{M} = N'$.

□

Proposição 3.1.13. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, α uma acção externa e $N = M^G \subseteq M$ um subfactor. Uma subálgebra de von Neumann P, intermédia entre M' e N' (a saber, $M' \subseteq P \subseteq N'$), é gerada por M' e por H, com $H \leq G$.*

Demonstração. Dado $k \in G$ vem, pela Proposição 3.1.12, que

$$\mathcal{E}(u_k) = a_1 + m_g u_g + \cdots + m_h u_h,$$

onde $\mathcal{E}$ é a esperança condicional em N' condicionada por P. Como

$$\mathcal{E}(u_k)x = \alpha_k(x)\mathcal{E}(u_k), \text{ para um qualquer } x \in M',$$

a Proposição 3.1.12 dá-nos que

$$m_g \alpha_g(x) u_g = \alpha_k(x) m_g u_g, \text{ para cada } x \in M',$$

ou seja,

$$m_g\alpha_g(x) = \alpha_k(x)m_g, \text{ para cada } x \in M'.$$

Então,

$$\alpha_{g^{-1}}\left(m_g\right)x = \alpha_{kg^{-1}}\left(x\right)\alpha_{g^{-1}}\left(m_g\right), \text{ para cada } x \in M'.$$

Consequentemente, $m_g = 0$, a não ser que $g = k$. Isto implica que ou $\mathcal{E}\left(u_k\right) = u_k$ ou $\mathcal{E}\left(u_k\right) = 0$, i.e., ou $u_k \in P$ ou $u_k \perp P$. Obviamente, $H = \{k : u_k \in P\} \leq G$. Então, P é gerado por M' e por H.

□

Teorema 3.1.14. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, α uma acção externa sobre M e $N = M^G \subseteq M$ um subfactor. Então, se N' é um factor finito, N' é algebricamente isomorfo ao produto cruzado $M' \rtimes_\alpha G$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.1.11 vem que $\{u_g : g \in G\}$ é uma família linearmente independente sobre M'. Assim, temos unicidade na representação $\sum_{g\in G} x'_g u_g$ de um elemento de M'. Considerando a construção de produto cruzado de Turumaru, vem, pela correspondência natural

$$\sum_{g\in G} x'_g u_g \longleftrightarrow \sum_{g\in G} x'_g \otimes g,$$

que as forma finitas são algebricamente isomorfas, preservando os traços. Ora, dois factores finitos são isomorfos se as sub-álgebras metricamente densas são isomorfas no traço que preserva a forma. Assim, conclui-se o resultado pretendido.

□

Corolário 3.1.15. *Sejam G um grupo numerável, M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, α uma acção externa e $N = M^G \subseteq M$ um subfactor. Então, se N' é um factor finito vem que G é finito, i.e., $|G| < \infty$.*

Demonstração. Com vista a um absurdo, admita-se que o resultado não é válido. Como N' é algebricamente isomorfa a $G \rtimes_\alpha M'$, pelo Teorema 3.1.14, existe um subespaço P em $G \rtimes_\alpha H$ tal que P pertence ao comutante de $G \rtimes_\alpha M'$ e $G \rtimes_\alpha M'|_P$ é espacialmente isomorfa a N'. Seja n um natural maior que $1/\dim P$, onde $\dim P$ caracteriza a dimensão de P relativamente a $(G \rtimes_\alpha M')'$. Então a cópia $n-$dimensional L de P contém $G \rtimes_\alpha H$. Como N' sobre H é espacialmente isomorfo a $G \rtimes_\alpha M'$ sobre P, o isomorfismo leva M' (enquanto subfactor de N') ao factor sobre P, pelo que a cópia M' de M' actua sobre L e a restrição de M' sobre $G \rtimes_\alpha H$ identifica-se com $id \otimes M'$. Consequentemente, o comutante de M' sobre L é isomorfo a $I_n \otimes M$ e é finito, visto que M' actua regularmente sobre H, por hipótese. por outro lado, o comutante de $id \otimes M'$ é isomorfo a $I_\infty \otimes M$, que é infinito. Ora, isto é um absurdo, visto que M' tem o comutante sobre L finito e contém $G \rtimes_\alpha H$.

□

Proposição 3.1.16. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, α uma acção externa sobre M e $N = M^G \subseteq M$. Então, $N' \cap M = \mathbb{C}id$.*

Demonstração. Seja $y \in M \cap N'$. Pela Proposição 3.1.12 temos que

$$y = a_1 + a_g u_g + \cdots + a_k u_k, \text{ onde } a_1, a_g, \cdots, a_k \in M'.$$

Seja $x \in M'$ um operador arbitrário. Comparando os coeficientes de yx e de xy, vem que $a_1 x = x a_1$ e que $a_g \alpha_g(x) = x a_g$, para um qualquer $g \neq 1$. A primeira equação implica que a_1 é um escalar, já que M' é um factor; a segunda equação implica que $a_g = 0$, para cada $g \neq 1$, em consequência do Teorema 2.1.17.

□

Proposição 3.1.17. *Sejam M e N factores do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$. Se $N' \cap M = \mathbb{C}id$, então cada sub-álgebra de von Neumann, intermédia entre N e M, é um subfactor de M. Consequentemente, cada sub-álgebra de von Neumann, intermédia entre M' e N', é um subfactor de N'.*

Demonstração. Se P é uma sub-álgebra de von Neumann, intermédiária entre N e M, i.e., $N \subseteq P \subseteq M$, então $M' \subseteq P' \subseteq N'$, pela Proposição 1.2.23. Pela relação

$$P' \cap P \subseteq N' \cap M = \mathbb{C}id,$$

concluimos que P é um subfactor de M. A segunda parte resulta imediatamente do demonstrado, por passagem ao comutante.

□

Proposição 3.1.18. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, α uma acção externa sobre M e $N = M^G \subseteq M$ um subfactor. Então:*

1. O reticulado dos subgrupos do grupo G e o reticulado dos subfactores intermediários entre M' e N' são isomorfos pela correspondência directa.

2. O reticulado dos subgrupos do grupo G e o reticulado dos subfactores intermediários entre M e $N = M^G$ são dualmente isomorfos.

Demonstração. (1) Aplicação directa das Proposições 3.1.13, 3.1.16 e 3.1.17. (2) Tomando o comutante, o reticulado dos subfactores intermédios entre M e N é dualmente isomorfo ao reticulado dos subfactores entre N' e M', pelo que o resultado segue-se da parte (1).

□

Lema 3.1.19. *Sejam M uma álgebra finita de von Neumann e $N = M^G \subseteq M$ uma sub-álgebra de von Neumann. Os operadores da forma $\sum_{i=1}^{n} a_i e_N b_i$, com $a_i, b_i \in M$, constituem uma sub-álgebra-$*$ em $M_1 = (M \cup \{e_N\})''$.*

Demonstração. A identidade $e_N x e_N = \mathcal{E}_N(x) e_N$ mostra que estes operadores formam uma sub-álgebra-$*$. Para verificar a densidade é suficiente provar que a projecção sobre o fecho de $M e_N L^2(M, tr)$ é a identidade sobre $L^2(M, tr)$. Ora, esta projecção é o suporte central de e_N em M_1. Como o suporte central de e em M_1 é 1 (ver [11]), sai o resultado.

□

Lema 3.1.20. *Sejam M uma álgebra finita de von Neumann e $N = M^G \subseteq M$ uma subálgebra de von Neumann. Suponhamos que $M_1 = (M \cup \{e_N\})''$ é uma extensão-λ de M por N. Então, para um qualquer $x \in M_1$ existe um único $m \in M$ tal que $xe_N = me_N$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{E}_M$ a esperança condicional de M_1 sobre M que preserva τ_1 (onde o traço τ_1 sobre M_1 a transforma numa extensão-λ de M por N). É claro que se m existe é tal que $m = \lambda^{-1}\mathcal{E}_M(xe_N)$. A continuidade fraca de $\mathcal{E}_M$ implica que só temos que provar a parte da existência num subconjunto denso de M_1. Ora, para $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_N b_i$, com $a_i, b_i \in M$, vem que $xe_N = \left(\sum_i a_i \mathcal{E}_N(b_i)\right) e_N$. Atendendo ao Lema 3.1.19, sai o resultado.

□

Proposição 3.1.21. *Sejam M uma álgebra finita de von Neumann, $N = M^G \subseteq M$ uma subálgebra de von Neumann e $M_1 = (M \cup \{e_N\})''$. Para cada $u \in \mathcal{U}(M)$ seja $\varphi(u) = ue_Nu^* \in M_1$ e considerem-se as projecções p tais que $\mathcal{E}_M(p) = [M : N]^{-1}\, id_M$. Então a aplicação φ induz uma correspondência biunívoca entre:*

1. *$\mathcal{U}(M)/\mathcal{U}(N)$ e as projecções $p \in M_1$, sendo que $\mathcal{E}_N(u) = 0$ se e só se $\varphi(u) = 0$.*
2. *$\mathcal{N}(N)/\mathcal{U}(N)$ e as projecções $p \in N' \cap M_1$.*

Demonstração. (**1**) Como e_N comuta com $\mathcal{U}(N)$ e

$$\mathcal{E}_M(ue_Nu^*) = \lambda uu^* = \lambda, \text{ onde } \lambda = [M : N]^{-1},$$

φ induz a aplicação desejada. Se $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$ então $u_2^* u_1 e_N = e_N u_2^* u_1$, pelo que $u_2^* u_1 \in N$. Para verificarmos que φ é sobrejectiva considere-se a projecção $p \in M_1$ tal que $\mathcal{E}_M(p) = \lambda$. Em particular, $\tau(p) = \lambda$, por forma a que p é equivalente a e_N em M_1. Pelo Lema 3.1.20 vem que existe $m \in M$ tal que $me_Nm^* = p$. Aplicando $\mathcal{E}_M$ a ambos os membros vem que $mm^* = id$, i.e., $m \in \mathcal{U}(M)$. Por outro lado, se $u \in \mathcal{U}(M)$ vem que

$$\mathcal{E}_N(u) = 0 \Longleftrightarrow e_Nue_N = 0 \Longleftrightarrow e_Nue_Nu^* = 0 \Longleftrightarrow e_N\varphi(u) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(u) = 0.$$

(**2**) Se $u \in \mathcal{N}(N)$ e $y \in N$ então

$$ue_Nu^*y = ue_N(u^*yu)u^* = u(u^*yu)e_Nu^* = yue_Nu^*.$$

Reciprocamente, se $ue_Nu^*y = yue_Nu^*$ então u^*yu comuta com e_N, por forma a que $u^*yu \in N$. Resta-nos provar a sobrejectividade de φ, que vem de (**1**).

□

3.2 Conjugação dos subfactores $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H$ e $\mathbf{R}^{G/H} \subseteq \mathbf{R}$

Definição 3.2.1. *Sejam M_i e N_i, $i = 1, 2$, álgebras de von Neumann. As inclusões $N_1 \subseteq M_1$ e $N_2 \subseteq M_2$ são **inclusões conjugadas** quando existe um isomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ tal que $\varphi(N_1) = N_2$, e escreve-se $(N_1 \subseteq M_1) \sim (N_2 \subseteq M_2)$.*

Observação 3.2.2. *A conjugação é uma relação de equivalência.*

Observação 3.2.3. *Resulta da Definição 3.2.1 que as inclusões $N_1 \subseteq M$ e $N_2 \subseteq M$ são inclusões conjugadas quando existe um automorfismo $\varphi \in Aut\,(M)$ tal que $\varphi(N_1) = N_2$, e escreve-se $(N_1 \subseteq M) \sim (N_2 \subseteq M)$. Comparar com a Observação 2.2.27.*

Teorema 3.2.4. *Sejam G um grupo finito, $\alpha : G \to Aut\,(\mathbf{R})$ uma acção externa e $H \trianglelefteq G$. Então*

$$\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right) \sim \left(\left(\mathbf{R}^H\right)^{G/H} \subseteq \mathbf{R}^H\right) \sim \left(\mathbf{R}^{G/H} \subseteq \mathbf{R}\right) \tag{3.2}$$

Demonstração. Seja $\alpha : G \to Aut(R)$ a acção externa de G sobre R. Então, para cada $x \in R^H$, vem que

$$\alpha_h\left(\alpha_g\left(x\right)\right) = \alpha_h\alpha_g\left(x\right) = \alpha_{hg}\left(x\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (H\trianglelefteq G)\Longrightarrow(Hg=gH)\Longrightarrow(h\cdot g = g\cdot h')}}{=} \alpha_{gh'}\left(x\right) = \alpha_g\left(\alpha_{h'}\left(x\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ x\in R^H}}{=} \alpha_g\left(x\right).$$

Logo,

$$\boxed{x \in \mathbf{R}^H \Longrightarrow \alpha_g\left(x\right) \in \mathbf{R}^H}.$$

Defina-se, para cada $x \in \mathbf{R}^H$,

$$\widetilde{\alpha} : G/H \to Aut\left(\mathbf{R}^H\right),$$

caracterizada por

$$\widetilde{\alpha}\left(gH\right)\left(x\right) = \alpha_g\left(x\right).$$

Vejamos que $\widetilde{\alpha}$ está bem definida:

$$\begin{aligned}\left(gH = g'H\right) &\Longrightarrow \left(g = g'h'h^{-1}\right) \\ &\Longrightarrow \left(\alpha_g\left(x\right) = \alpha_{g'h'h^{-1}}\left(x\right) = \alpha_{g'}\left(\alpha_{h'h^{-1}}\left(x\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ h'h^{-1}\in H \\ x\in\mathbf{R}^H}}{=} \alpha_{g'}\left(x\right)\right).\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$G/H = \left\{gH\right\}_{g\in G}, \text{ onde } g_1H \bullet g_2H = g_1g_2H.$$

Provemos então que

$$\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right) \sim \left(\left(\mathbf{R}^H\right)^{G/H} \subseteq \mathbf{R}^H\right).$$

Defina-se, para o efeito,

$$\theta := \widetilde{\alpha}_{gH}, \text{ onde } g \in G \backslash H.$$

É claro que

$$\theta : \mathbf{R}^H \to \mathbf{R}^H,$$

verificando-se que

1. $\theta \in Aut\left(\mathbf{R}^H\right)$

2. $\left(a \in \mathbf{R}^G\right) \Longrightarrow \left(\theta\left(a\right) \in \left(\mathbf{R}^H\right)^{G/H}\right)$

A propriedade 1 é imediata. Provemos a propriedade 2.

De $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H$ vem que dado $a \in \mathbf{R}^G$ temos que $\theta\left(a\right) \in \mathbf{R}^H$. Mas pretendemos mostrar que $\theta\left(a\right) \in \left(\mathbf{R}^H\right)^{G/H}$, ou seja, pretendemos mostrar que

$$\boxed{\widetilde{\alpha}_{kH}\left(\theta\left(a\right)\right) = \theta\left(a\right), \text{ para cada } kH \in G/H \text{ e para cada } a \in \mathbf{R}^G}.$$

Ora,

$$\begin{gathered}
\widetilde{\alpha}_{kH}\widetilde{\alpha}_{gH}\left(a\right) = \widetilde{\alpha}_{gH}\left(a\right) \\
\Updownarrow \\
\widetilde{\alpha}_{kgH}\left(a\right) = \widetilde{\alpha}_{gH}\left(a\right) \\
\Updownarrow \text{ (Def. de } \widetilde{\alpha}\text{)} \\
\alpha_{kg}\left(a\right) = \alpha_g\left(a\right) \\
\Updownarrow \left(a \in \mathbf{R}^G\right) \\
\alpha_k\left(a\right) = a \\
\Updownarrow \left(k \in G\right) \\
a = a,
\end{gathered}$$

pelo que se tem por provado o pretendido.

Falta demonstrar que

$$\left(\left(\mathbf{R}^H\right)^{G/H} \subseteq \mathbf{R}^H\right) \sim \left(\mathbf{R}^{G/H} \subseteq \mathbf{R}\right). \tag{3.3}$$

Sendo H um grupo finito, $\mathbf{R}^H$ é um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, pelo que $\mathbf{R}^H$ é factor hiperfinito do tipo $\mathbf{II}_1$. Logo, pelo Teorema 2.3.2, vem que $\mathbf{R}^H \simeq \mathbf{R}$, pelo que em $\left(\mathbf{R}^H\right)^{G/H} \subseteq \mathbf{R}^H$ podemos substituir $\mathbf{R}^H$ por $\mathbf{R}$ e, portanto, vem (3.3).

□

Corolário 3.2.5. *Sejam G um grupo finito, H um subgrupo de G e $N := \mathcal{N}(G,H)$. Então*

$$\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right) \sim \left(\left(\mathbf{R}^N\right)^{G/N} \subseteq \left(\mathbf{R}^N\right)^{H/N}\right) \sim \left(\mathbf{R}^{G/N} \subseteq \mathbf{R}^{H/N}\right) \tag{3.4}$$

Demonstração. Sendo N o normalizador de H em G vem que $H \trianglelefteq N$. Aplicando o Teorema 3.2.4 vem que

$$\left(\mathbf{R}^N \subseteq \mathbf{R}^H\right) \overset{\varphi}{\sim} \left(\left(\mathbf{R}^H\right)^{N/H} \subseteq \mathbf{R}^H\right) \overset{\psi}{\sim} \left(\mathbf{R}^{N/H} \subseteq \mathbf{R}\right).$$

Como $N \leq G$ vem que $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^N$, que $\left(\mathbf{R}^N\right)^{G/N} \subseteq \left(\mathbf{R}^H\right)^{N/H}$ e que $\mathbf{R}^{G/N} \subseteq \mathbf{R}^{N/H}$, pelo que sai o resultado, uma vez que facilmente se verifica, da demontração do Teorema 3.2.4, que

$$\varphi\left(\mathbf{R}^G\right) = \left(\mathbf{R}^N\right)^{G/N} \text{ e que } \psi\left(\left(\mathbf{R}^N\right)^{G/N}\right) = \mathbf{R}^{G/N}.$$

□

Observação 3.2.6. *Note-se que se $H \trianglelefteq G$ então $H = \mathcal{N}(G, H)$.*

Observação 3.2.7. *Sejam G um grupo finito, M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $H \trianglelefteq G$. Então, podemos usar a técnica da demonstração do Teorema 3.2.4 para provar que o subfactor $M \rtimes_\alpha H \subseteq M \rtimes_\alpha G$ é conjugado do subfactor $M \subseteq M \rtimes_\alpha (G/H)$, a saber*

$$(M \rtimes_\alpha H \subseteq M \rtimes_\alpha G) \sim (M \subseteq M \rtimes_\alpha (G/H)). \tag{3.5}$$

3.3 Elementos de Galois

Referências: [5, 7, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 34, 37]

Uma das primeiras coisas que Murray e von Neumann fizeram com a sua teoria das dimensões contínuas para subespaços associados a factores do tipo $\mathbf{II}_1$ consistiu na definição de um *invariante para a acção sobre um espaço Hilbert*. Este invariante ficou conhecido como **constante de acoplamento** e mede a mobilidade ralativa entre um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e o seu comutante. Mais concretamente, se M é um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ sobre $\mathcal{H}$ e M' é o seu comutante, a constante de acoplamento $\mathcal{C}_M$ é infinita se M' é um factor infinito e se M' é finito tomamos um qualquer vector $\xi \in \mathcal{H}$ e consideramos os subespaços fechados $[M\xi]$ e $[M'\xi]$, associados a M' e a M, respectivamente. É um resultado não trivial de Murray e von Neumann que o quociente $\mathcal{C}_M = \dim_{M'}([M'\xi]) / \dim_M([M\xi])$ não depende de ξ. Este número real entre 0 e ∞ é a constante de acoplamento.

A constante de acoplamento pode usar-se para definir um *invariante por conjugação para subfactores de factores do tipo* $\mathbf{II}_1$. Chamamos a este invariante **índice de Jones**, visto que se o subfactor resulta de um subgrupo do grupo de construções de factores do tipo $\mathbf{II}_1$, o invariante por conjugação é o índice de Jones do subgrupo. O índice em geral é definido como $\dim_N(L^2(M, tr))$, onde N é o subfactor e tr o traço sobre M.

Considerando a inclusão $N \subseteq M$ podemos considerar a família dos automorfismos sobre M cuja restrição a N é a identidade sobre N. Este *invariante para a inclusão de subfactores* é o **grupo de Galois**.

Definição 3.3.1. *Seja M um factor a operar sobre o Hilbert H. Dado $0 \neq x \in H$ temos que a **constante de acoplamento** é dada por $\mathcal{C}_M = D_1([M'\xi])/D_2([M\xi])$, onde D_1 e D_2 são, respectivamente, as funções dimensão de M e do seu comutante M'.*

Observação 3.3.2. *A constante de acoplamento não depende da escolha de ξ, sendo um invariante de M e da sua posição relativamente ao comutante M'.*

Observação 3.3.3. *Seja M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, G um grupo finito e $H \leq G$. Sabemos que M actua sobre $L^2(M, tr)$, pelo que $M \rtimes G$ actua sobre $\mathcal{H} = L^2(M, tr) \otimes l^2_G(\mathbb{C})$. As constantes de acoplamento de M e $M \rtimes G$ sobre $\mathcal{H}$ são $|G|$ e 1, respectivamente. Então, se definirmos o* ***grau de extensão*** *pela razão das constantes de acoplamento obtemos as propriedades desejadas. No caso do par $M \rtimes H \subseteq M \rtimes G$ o grau de extensão será $[G : H]$.*

Definição 3.3.4. *Seja M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e seja $N \subseteq M$ um subfactor. O* ***índice de Jones****, denotado $[M : N]$, é a constante de acoplamento para N, onde se encara N como uma álgebra de operadores sobre $L^2(M, tr)$, i.e., $[M : N] = \dim_N(L^2(M, tr))$.*

Observação 3.3.5. *Nas condições acima, sempre que $\mathcal{H}$ é o espaço Hilbert sobre o qual M actua, se tivermos que $\dim_M(\mathcal{H}) < \infty$, então $[M : N] = \dim_N(\mathcal{H}) / \dim_M(\mathcal{H})$.*

Definição 3.3.6. *Sejam M e N álgebras de von Neumann tais que $N \subseteq M$. O* ***grupo de Galois*** *para o par $N \subseteq M$ denota-se e define-se por*

$$Gal(M, N) := \{\alpha \in Aut(M) : \alpha|_N = id_N\}$$

Definição 3.3.7. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, G um grupo finito, $N \subseteq M$ um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção. A* ***construção básica*** *consiste em deixar M actuar sobre $L^2(M, tr)$ e construir a álgebra de von Neumann $\langle M, e\rangle$ sobre $L^2(M, tr)$ gerada por M e pela extensão a $L^2(M, tr)$ da esperança condicional $\mathcal{E}$ de M sobre N.*

Proposição 3.3.8. *Algumas propriedades elementares da construção básica:*

(a) Se $x \in M$, então $exe = \mathcal{E}(x)e$.
(b) $\{e\}' \cap M = N$.
(c) Se J é a isometria linear conjugada de $L^2(M, tr)$ temos

$$JeJ = e \,,\, N' = J \langle M, e\rangle J$$

ou

$$\langle M, e\rangle = JN'J.$$

(d) As combinações lineares $\sum_i x_i e y_i$, com $x_i, y_i \in M$, contituem uma sub-álgebra-$*$ densa de $\langle M, e\rangle$.
(e) Se $[M : N] < \infty$ então $\langle M, e_N\rangle$ é um factor $\mathbf{II}_1$ e

$$[\langle M, e_N\rangle : M] = [M : N].$$

(f) $tr(e)\,[M : N] = 1$.
(g) Se $x \in M$, então $tr(xe) = tr(x)tr(e) = tr(x)\,[M : N]^{-1}$.

Demonstração. $(a) - (f)$: uso dos teoremas do bicomutante (Teoremas 1.2.30 e 1.2.29).

(c) e (d): usar também a igualdade $\dim_M(\mathcal{H}) \dim_{M'}(\mathcal{H}) = 1$.

(g): Temos que $\tau(xe) = \tau(exe) = \tau(\mathcal{E}(x)e)$. Como $z \mapsto \tau(ze)$ é um traço sobre N, a unicidade do traço conduz-nos a $\tau(\mathcal{E}(x)e) = \tau(\mathcal{E}(x))\tau(e) = \tau(x)\tau(e)$.

□

Teorema 3.3.9. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$, G um grupo finito e α uma acção externa. Então, $M \rtimes_\alpha G$ é gerado por $M \cup \{e\}$, i.e.,*

$$M \rtimes_\alpha G = \langle M, e \rangle$$

Demonstração. Trivial a partir da Proposição 3.3.8 □

Observação 3.3.10. *Podem verificar-se as seguintes propriedades (com detalhes em [11]), por adequada manipulação da constante de acoplamento:*

(1) Se $N \subseteq M \subseteq P$ então

$$[P : N] = [P : M][M : N].$$

(2) Se $N \subseteq M$ actua sobre $\mathcal{H}$ e N' é do tipo $\mathbf{II}_1$ então

$$[N' : M'] = [M : N].$$

(3) Se $p \in N' \cap M$ é uma projecção e $[M : N] < \infty$ então

$$[pMp : pNp] = [M : N] tr_M(p) tr_{N'}(p).$$

(4) Se $N_1 \subseteq M_1$, $N_2 \subseteq M_2$ então

$$[M_1 \otimes M_2 : N_1 \otimes N_2] = [M_1 : N_1][M_2 : N_2].$$

(5) Se $[M : N] < \infty$ então $\dim_{\mathbb{C}}(N' \cap M) < \infty$.
(6) Se $|G| < \infty$ então

$$[M \rtimes G : M] = \left[M : M^G\right] = |G|$$

Proposição 3.3.11. *Se* $\dim(N' \cap M) > 1$, *então* $[M : N] \geq 4$.

Demonstração. Como $N' \cap M$ é uma álgebra vN (intersecção de duas álgebras vN) contém uma projecção $p \notin \{0, 1\}$. Como $[pMp : pNp] \geq 1$ temos que

$$[M : N] tr_M(p) \geq 1/tr_{N'}(p)$$

e que

$$[M : N] tr_M(1-p) \geq 1/tr_{N'}(1-p).$$

Somando ordenadamente, vem que

$$[M : N] \geq 1/d + 1/(1-d),$$

para algum $d \in]0, 1[$. Logo, $[M : N] \geq 4$.

□

Observação 3.3.12. *A obtenção dos outros valores do índice de Jones já não tem a mesma simplicidade. Para a sua determinação devemos recorrer à* ***construção básica****.*

Teorema 3.3.13. $[\mathbf{V.R.F.\ Jones, 1983}]$ *Seja M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e seja $N \subseteq M$ um subfactor. Temos que $\{4\cos^2(\frac{\pi}{n}) : n \in \mathbb{N}, n \geq 3\} \cup [4, +\infty]$ é o conjunto de valores possíveis para o índice de Jones.*

Demonstração. Ver [7] e [11].

$\square$

Proposição 3.3.14. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ um subfactor. Temos então que:*

1. *Para um qualquer automorfismo $\varphi \in Aut(M)$ vale que $Gal(M, \varphi(N)) = \varphi Gal(M, N)\varphi^{-1}$, i.e., o grupo de Galois é um invariante por conjugação.*
2. *$Gal(M, N) \cap Int(M)$ é isomorfo a $\mathcal{U}(N' \cap M)/\mathbf{T}$, onde $\mathbf{T}$ é o toro unidimensional.*
3. *$N' \cap M = \mathbb{C}id$ se e só se $Gal(M, N) \cap Int(M) = \{id_M\}$, i.e., a acção natural de $Gal(M, N)$ sobre M é livre.*
4. *Se $Gal(M, N)$ é um grupo finito, então $N' \cap M = \mathbb{C}id$.*

Demonstração. (**1**) Sejam $N \subseteq M$ e $\varphi \in Aut(M)$. Dizer que $\theta \in Gal(M, \varphi(N))$ significa que

$$\varphi(N) \subseteq M,\ \theta \in Aut(M) \text{ e que } \theta|_{\varphi(N)} = id_{\varphi(N)}.$$

Dado $n \in N$ temos que

$$(id_{\varphi(N)} \circ \varphi)(n) = id_{\varphi(N)}(\varphi(n)) = \varphi(n).$$

De igual modo, $\psi \in Gal(M, N)$ significa que

$$N \subseteq M,\ \psi \in Aut(M) \text{ e que } \psi|_N = id_N.$$

Dado $n \in N$ temos que $(\varphi \circ id_N)(n) = \varphi(n)$. Assim,

$$\theta \in Gal(M, \varphi(N))\varphi \iff \theta \in \varphi Gal(M, N),$$

ou seja

$$\theta \in Gal(M, \varphi(N)) \iff \theta \in \varphi Gal(M, N)\varphi^{-1}.$$

(**2**) Sabemos que

$$\mathbf{T} = \{\lambda \cdot id : \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } |\lambda| = 1\}.$$

Ora, $\theta \in Gal(M, N) \cap Int(M)$ significa que

$$N \subseteq M, \theta \in Aut(M),\ \theta|_N = id_N$$

e que

$$\exists u \in \mathcal{U}(M) \text{ tal que para cada } x \in M \text{ temos } \theta(x) = uxu^* = Ad_u(x).$$

Por outro lado, dado $u \in \mathcal{U}(M)$,

$$\begin{array}{rcl} u & \in & N' \\ & \Updownarrow & \\ ux & = & xu, \forall_{x \in N} \\ & \Updownarrow & \\ uxu^* & = & x, \forall_{x \in N} \\ & \Updownarrow & \\ \psi(x) & \equiv & Ad_u(x) = x, \forall_{x \in N} \\ & \Updownarrow & \\ \psi|_N & = & id_N. \end{array}$$

Ora,

$$Ad_u = Ad_v \Longleftrightarrow uv^* \in \mathbf{T},$$

pelo que

$$\begin{array}{rcl} \theta & = & Ad_u \in Gal(M,N) \cap Int(M) \\ & \Updownarrow & \\ u & \in & \mathcal{U}(N' \cap M)/\mathbf{T}. \end{array}$$

($\mathbf{3}$) Se $N' \cap M = \mathbb{C}id$ vem que $\mathcal{U}(N' \cap M) = \mathbf{T}$, pelo que

$$\mathcal{U}(N' \cap M)/\mathbf{T} = \{id\}.$$

Por (2) vem que

$$Gal(M,N) \cap Int(M) = \{id\} = \{id_M\}.$$

Reciprocamente, basta inverter a sequência anterior.

($\mathbf{4}$) Atendendo a (2) se $|Gal(M,N)| < \infty$ vem que $|\mathcal{U}(N' \cap M)/\mathbf{T}| < \infty$. Atendendo à definição de $\mathbf{T}$ isto só acontece se $\mathcal{U}(N' \cap M) \sim \mathbf{T}$, ou seja, $N' \cap M = \mathbb{C}id$.

□

Teorema 3.3.15. [**Normalizadores**] *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ um subfactor de M. Seja M_1 a construção básica para o par $N \subseteq M$. Então, temos que:*

1. $Gal(M,N)$ é canonicamente isomorfo a $\widetilde{\mathcal{N}}(M_1, M)$.

Se além do mais, $[M : N] < \infty$ e $N' \cap M = \mathbb{C}id$, vem que:

2. $Gal(M,N)$ é um grupo finito.
3. $Gal(M_1,N)$ é canonicamente isomorfo a $\widetilde{\mathcal{N}}(M,N)$.

Demonstração. (**1**) Sejam σ o traço normal canónico de M e J a isometria linear conjugada sobre o espaço Hilbert $L^2(M, \sigma)$. Considerando um unitário $v \in \mathcal{N}(M_1, M)$ vem que JvJ normaliza M e fica em N', por forma a que $Ad(JvJ)$ define um automorfismo em $Gal(M, N)$. Então, temos o seguinte homomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} \Phi & : & \mathcal{N}(M_1, M) \to Gal(M, N) \\ v & \mapsto & Ad(JvJ) \end{array}$$

Ora, $\Phi(\mathcal{N}(M_1, M)) = Gal(M, N)$. De facto, para um qualquer $\varphi \in Gal(M, N)$ existe um operador unitário u sobre $L^2(M, \sigma)$ tal que $\varphi = Ad(u)$. Então, como $\varphi|_N = id|_N$ vem que $u \in N'$, pelo que $JuJ \in M_1$. Como u normaliza M, vem que JuJ também normaliza M. Então, $v = JuJ \in \mathcal{N}(M_1, M)$ e $\varphi = Ad(JvJ)$. Logo, sai a conclusão.

(**2**) Ora, $Gal(M, N) \leq \alpha(G)$. Assim, $|\alpha(G)| < \infty$ implica que $|Gal(M, N)| < \infty$. Usando o Corolário 3.1.15 sai o resultado.

(**3**) Para um operador unitário $u \in \mathcal{N}(M, N)$, JuJ normaliza M_1 e $JuJ \in M'$, de tal forma que $Ad(JuJ)$ define um automorfismo em $Gal(M_1, N)$. Esta correspondência induz um isomorfismo

$$\Psi : \widetilde{\mathcal{N}}(M, N) \to Gal(M_1, N).$$

Então, basta-nos mostrar a sobrejectividade de Ψ. Seja e a projecção ortogonal de $L^2(M, \tau)$ sobre $L^2(N, \tau)$. Então, M_1 é gerado por M e por e sobre $L^2(M, \tau)$, de tal forma que cada automorfismo $\alpha \in Gal(M_1, N)$ é determinado por $\alpha(e)$. É sabido que e é uma projecção em $N' \cap M_1$, com $\mathcal{E}_M(e) = [M : N]^{-1} id_M$, onde $\mathcal{E}_M$ é a esperança condicional de M_1 sobre M, que preserva o traço. Assim, $\alpha(e)$ goza das mesmas propriedades. Aplicando a Proposição 3.1.21 vem que $\left|\widetilde{\mathcal{N}}(M, N)\right| \geq |Gal(M_1, N)|$. Como $Gal(M_1, N)$ é um grupo finito, por (**2**), vem que Ψ é sobrejectivo.

□

Corolário 3.3.16. [**Estrutura do grupo de Galois**] *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ um subfactor de M. Se tivermos $[M : N] = |Gal(M, N)| < \infty$, então $N = M^{Gal(M,N)}$.*

Demonstração. Como $|Gal(M, N)| < \infty$, a aplicação do ponto (**4**) da Proposição 3.3.14 permite-nos concluir que $N' \cap M = \mathbb{C}id$. Assim, $M^{Gal(M,N)}$ é um subfactor de M. Por hipótese, $\left[M : M^{Gal(M,N)}\right] = [M : N]$. Como $N \subseteq M^{Gal(M,N)} \subseteq M$, vem que $N = M^{Gal(M,N)}$.

□

Observação 3.3.17. *Vamos investigar a estrutura do grupo de Galois, $Gal(M, N)$, para um par $N \subseteq M$ de factores finitos tais que $[M : N] < \infty$. Não assumimos que $N' \cap M = \mathbb{C}id$. Ao invés, fazemos $F = N' \cap M$ e $L = F' \cap M$. Note-se que L é uma sub-álgebra de M contendo N, i.e., $N \subseteq L \subseteq M$.*

Corolário 3.3.18. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ um subfactor de M tal que $[M : N] < \infty$. Então, o grupo de Galois $Gal(M, N)$ tem a estrutura de um grupo de Lie compacto, cuja componente conexa é $Gal(M, L)$, a qual é isomorfa a $\mathcal{U}(F)/\mathbf{T}$.*

Demonstração. Seja
$$\Phi : Gal(M, N) \to Gal(L, N)$$
um homomorfismo definido pela restrição de $g \in Gal(M, N)$ a L, a saber $g|_L$.

Verifica-se que
$$ker\Phi = Gal(M, N),$$
pelo que $Gal(M, L)$ é isomorfo a $\mathcal{U}(F)/\mathbf{T}$.

Como $[M : N]$ é finito, F é finito dimensional (Corolário 2.2.3 de [11]), de tal forma que $\mathcal{U}(F)/\mathbf{T}$ pode encarar-se como um grupo de Lie compacto, e temos que
$$\mathcal{Z}(L) = \mathcal{Z}(F).$$

Denotamos por $p_1, p_2, \cdots, p_l$ a família de todos os átomos de $\mathcal{Z}(L)$. Então, $ker\Phi$ é isomorfo a um subgrupo do grupo produto $\prod_{i=1}^{l} Gal\left(L_{p_i}, N_{p_i}\right)$.

Pelo Teorema 3.3.15, cada $Gal\left(L_{p_i}, N_{p_i}\right)$ é um grupo finito porque cada par
$$L_{p_i} \supseteq N_{p_i}$$
é um par factor-subfactor com um índice finito, e tem um comutante relativo trivial. Assim, vem que $Gal(M, N)/Gal(M, L)$ é um grupo finito. Logo, sai o resultado.

$\square$

3.4 Séries de Galois

Referências: [17]

A seguir vamos definir a série de Galois para um par $N \subseteq M$ de factores finitos e considerar a decomposição do índice de Jones $[M : N]$ associada a esta série. Vamos analisar algumas relações entre a série das construções básicas iteradas e a correspondente série de Galois.

Observação 3.4.1. *Dada uma série derivada $(D_0, D_1, D_2, \cdots, D_k, \cdots)$, associada ao grupo G, prova-se que $D_n \trianglelefteq D_{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.4.2. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ um subfactor de M tais que $[M : N] < \infty$ e $N' \cap M = \mathbb{C}id$. Faça-se*
$$G_1 := Gal(M, N),\ L_1 := M^{G_1}$$
e indutivamente
$$G_{i+1} := Gal(L_i, N),\ L_{i+1} := (L_i)^{G_{i+1}},\ para\ i \geq 1.$$
*Se $[M : N] < \infty$ e $N' \cap M = \mathbb{C}id$, existe um número natural l tal que $G_l = \{e\}$, $G_{l-1} \neq \{e\}$ e todo G_k $(k = 1, 2, \cdots, l)$ é um grupo finito. Chamamos **série de Galois de** N **para** M, denotada $\mathcal{S}(M, N)$, à sequência de grupos finitos $(G_1, G_2, \cdots, G_l)$, i.e.,*
$$\mathcal{S}(M, N) := (G_1, G_2, \cdots, G_l)$$

Exemplo 3.4.3. *Sejam $\alpha : G \to Aut(M)$ uma acção livre de um grupo finito G sobre um factor M do tipo $\mathbf{II}_1$. Então:*

1. $\mathcal{S}(M, M^G) \cong (G, \{e\})$.
2. Se G é um grupo simples, então $\mathcal{S}(M \rtimes_\alpha G, M) \cong (\{e\})$.
3. Se G é um grupo resolúvel com a série derivada dada por
$$G = D_0 \supseteq D_1 \supseteq \cdots \supseteq D_{l-1} \supseteq D_l = \{e\},$$
então
$$\mathcal{S}(M \rtimes_\alpha G, M) = (D_0/D_1, D_1/D_2, \cdots, D_{l-1}/D_l).$$

Observação 3.4.4. *O subgrupo comutador do grupo simétrico S_n é o grupo alterno A_n, i.e.,*

$$[S_n, S_n] = A_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Observação 3.4.5. *Para um par $N \subseteq M$ de factores do tipo $\mathbf{II}_1$ tal que $[M : N] < \infty$, denotamos por $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a sequência dos factores do tipo $\mathbf{II}_1$ iteradas, incluindo a torre de Jones, com $M_0 = M$ e $M_{-1} = N$.*

Corolário 3.4.6. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ um subfactor de M tais que $[M : N] < \infty$ e $N' \cap M = \mathbb{C}id$. Então, temos $\mathcal{S}(M_i, M_{i-1}) \cong \mathcal{S}(M_{i+2}, M_{i+1})$, para um qualquer $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Considerando a Observação 3.4.5 e a aplicação iterada dos resultados e argumentos do Teorema 3.3.15 sai o resultado.

□

Observação 3.4.7. *Pela definição de série de Galois, percebe-se que o índice de Jones pode decompor-se como*

$$[M : N] = [M : L_1]\,[L_1 : L_2] \cdots [L_l : N]. \tag{3.6}$$

Verificamos que

$$[L_{k-1} : L_k] = |G_k| \qquad (k = 1, 2, \cdots, l),$$

onde $M = L_0$ e $Gal(L_l, N) = \{e\}$. Denotamos por $(L_l)_1$ a construção básica para o par $N \subseteq L_l$. Pelo Teorema 3.3.15, vem que $Gal(L_l, N) = \{e\}$ implica que L_l é um subfactor singular de $(L_l)_1$. Como $[(L_l)_1 : L_l] = [L_l : N]$, vemos que o problema de encontrar valores possíveis para o índice dos subfactores com um comutante relativo trivial reduz-se ao caso dos subfactores singulares.

Teorema 3.4.8. *Sejam M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e $N \subseteq M$ um subfactor de M tal que*

$$N' \cap M = \mathbb{C}\,(id).$$

Então,

$$|Gal\,(M,N)| \leq [M:N]$$

Demonstração. Elementar, por aplicação de (3.6), sabendo que

$$[M:L_1] = |Gal\,(M,N)|$$

e que

$$[L_1:L_2] \geq 1, \quad [L_2:L_3] \geq 1, \quad \cdots \quad , \quad [L_l:N] \geq 1.$$

□

3.5 Álgebras de von Neumann do tipo I

Observação 3.5.1. *$tr(p) = dim(\mathcal{K})/n$ onde $n = dim(\mathcal{H})$ e $\mathcal{K}$ é o subespaço de $\mathcal{H}$ onde a projecção ortogonal p é projectada.*

Observação 3.5.2. *Não é possível definir uma acção externa de um grupo finito sobre factores do tipo* **I**, *i.e., dado $\varphi \in Aut\,(\mathbf{L}\,(H))$ existe um unitário $u \in \mathcal{U}\,(\mathbf{L}\,(H))$ tal que $\varphi\,(a) = uau^*$. A este propósito ver a nota que se segue ao Corolário 2.13, em [5], página 55.*

Proposição 3.5.3. [**Subfactores do tipo I**] *Considere-se*

$$N := \mathbf{L}\,(\mathcal{H}_n) \otimes I_p \subseteq \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_p\right) =: M,$$

com $dim\,(\mathcal{H}_n) = n$ e $dim\left(\mathcal{H}_p\right) = p$. Temos que:

1. *$N \subseteq M$ são subfactores (N do tipo $\mathbf{I}_n$ e M do tipo $\mathbf{I}_{np}$).*
2. *$[M:N] = p^2$.*
3. *$Gal\,(M,N) \supseteq \mathcal{U}\left(Mat_{p\times p}\,(\mathbb{C})\right)$. Em particular, $Gal\,(M,N)$ é um grupo infinito.*
4. *$N' \cap M \cong \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right)$.*

Demonstração. Dado um Hilbert $\mathcal{H}$, considere-se a constante de acoplamento, dada por

$$dim_N\,(\mathcal{H}) := \frac{tr_N\,(p_\xi)}{tr_{N'}\left(p'_\xi\right)},$$

onde

$$p_\xi = \left[N'\xi\right] \Longrightarrow p_\xi \in \mathcal{P}_N$$

e

$$p'_\xi = [N\xi] \Longrightarrow p'_\xi \in \mathcal{P}_{N'}.$$

Por uma questão de linguagem, veja-se que

$$tr_N\left(p_\xi\right) \equiv D_1\left(\left[N'\xi\right]\right)$$

e que

$$tr_{N'}\left(p'_\xi\right) \equiv D_2\left(\left[N\xi\right]\right).$$

(**1**) Basta perceber que

$$N = \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_n\right) \otimes I_p \cong Mat_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right) \otimes I_p \cong Mat_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)$$

e que

$$M = \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_p\right) \cong Mat_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right) \otimes Mat_{p\times p}\left(\mathbb{C}\right) \cong Mat_{np\times np}\left(\mathbb{C}\right).$$

(2) Considere-se

$$\xi := \xi_1 \otimes \xi_2 \in \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_p$$

e

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_p.$$

Assim,

$$\left(\mathbf{L}\left(\mathcal{H}_n\right) \otimes I_p\right)\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right) = \mathcal{H}_n \otimes \left[\xi_2\right]$$

e

$$\left(\mathbf{L}\left(\mathcal{H}_n\right) \otimes I_p\right)'\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right) = \left(I_n \otimes \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right)\right)\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right) = \left[\xi_1\right] \otimes \mathcal{H}_p.$$

Posto isto, vem que

$$tr_N\left(p_\xi\right) = \frac{p}{np} = \frac{1}{n}$$

e que

$$tr_{N'}\left(p'_\xi\right) = \frac{n}{np} = \frac{1}{p}.$$

Logo,

$$dim_N\left(\mathcal{H}\right) = dim_N\left(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_p\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{n}.$$

Note-se que

$$\begin{array}{rcl} N \text{ do tipo } I_n \text{ e } n & = & dim\left(\mathcal{H}_n\right) \\ & \Downarrow & \\ \dim_N\left(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_p\right) & = & \frac{p}{n}, \text{ para qualquer } p \in \mathbb{N} \end{array} \tag{3.7}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} [M:N] &= dim_N\left(L^2\left(M\right)\right) \\ &= dim_N\left(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_{np^2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (3.7)}}{=} \frac{np^2}{n} = p^2. \end{aligned}$$

(3) Seja $u \in \mathcal{U}\left(\mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right)\right)$ e faça-se $U := I_n \otimes u$.
É preciso compreender que

$$\varphi \in Gal\,(M,N) \Longleftrightarrow \varphi \in Aut(M) \wedge \varphi|_N = id_M.$$

Então, em concordância com a Observação 3.5.2, para um qualquer $x \in N$, vem que

$$\begin{aligned} U\left(x \otimes I_p\right) U^* &= \left(I_n \otimes u\right)\left(x \otimes I_p\right)\left(I_n \otimes u\right)^* \\ &= \left(I_n \otimes u\right)\left(x \otimes I_p\right)\left(I_n \otimes u^*\right) \\ &= x \otimes \left(uu^*\right) = x \otimes I_p. \end{aligned}$$

Como $I_{np} \equiv I_n \otimes I_p$, vem que

$$\varphi_u : x \otimes I_p \mapsto U\left(x \otimes I_p\right) U^*$$

é tal que $\varphi_u \in Aut(M)$ e

$$\varphi_u|_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_n)\otimes I_p} \equiv \varphi_u|_N = I_{np} \equiv id_M,$$

ou seja, $\varphi_u \in Gal\,(M,N)$. Assim,

$$u \in \mathcal{U}\left(\mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right)\right) \underset{u}{\Longrightarrow} \varphi_u \in Gal\,(M,N)\,,$$

pelo que podemos afirmar que $Gal\,(M,N) \supseteq \mathcal{U}\left(\mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right)\right)$.
Como $\mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right) \cong Mat_{p\times p}\left(\mathbb{C}\right)$ vem que $Gal\,(M,N)$ é infinito.
Quando $n = p = 2$, $Gal\,(M,N)$ inclui o grupo $SU(2)$ – grupo de Lie compacto.
É legítimo escrever

$$Gal\,(M,N) \supseteq \mathcal{U}\left(Mat_{p\times p}\left(\mathbb{C}\right)\right).$$

(4) Temos que

$$\begin{aligned} N' \cap M &= \left(\mathbf{L}\left(\mathcal{H}_n\right) \otimes I_p\right)' \cap \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_p\right) \\ &= \left(I_n \otimes \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right)\right) \cap \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_p\right) \\ &= I_n \otimes \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right) \cong \mathbf{L}\left(\mathcal{H}_p\right). \end{aligned}$$

□

Corolário 3.5.4. *Sejam A um factor do tipo $\mathbf{I}_p$, B um factor do tipo $\mathbf{I}_q$ e $A \subseteq B$. Então, $p|q$.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 3.5.3, onde A é factor do tipo $\mathbf{I}_p$ e B factor do tipo $\mathbf{I}_q$.

□

Exemplo 3.5.5. [**inclusão** *versus* **produto cruzado** *numa álgebra abeliana*]

Se tivermos álgebras de von Neumann M e P, um grupo finito G, e a relação $M \subseteq P \subseteq M \rtimes_\alpha G$, nada nos garante que exista $H \leq G$ tal que $P = M \rtimes_{\alpha|_H} H$. Faça-se, por exemplo, $M = l^\infty_G\left(\mathbb{C}\right)$. Sabemos, pela Proposição 2.2.25, que

$$l_G^{\infty}(\mathbb{C}) \rtimes_{\alpha} G \simeq Mat_{|G|\times|G|}(\mathbb{C}).$$

Se fizermos $G = \mathbb{Z}_3$ e usarmos $*$ para representar um qualquer elemento genérico de $M = l_G^{\infty}(\mathbb{C})$ vem que

$$M \rtimes_{\alpha} G = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

e que

$$t_{\alpha}(M) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Se fizermos

$$P = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

vem que P é uma álgebra de von Neumann mas não existe $H \leq G$ tal que tenhamos $P = M \rtimes_{\alpha|_H} H$. De facto, $H \leq \mathbb{Z}_3$ se e só se $H \in \{\{0\}, \mathbb{Z}_3\}$ porque $\mathbb{Z}_3$ é um grupo simples. Então,

$$M \subseteq P \subseteq M \rtimes_{\alpha} G \quad \not\Rightarrow \quad P = M \rtimes_{\alpha|_H} H.$$

O que falha nesta conjuntura é que

$$l_G^{\infty}(\mathbb{C}) \ \textbf{não é um factor}.$$

A acção $\alpha : \mathbb{Z}_3 \to Aut\left(l_G^{\infty}(\mathbb{C})\right)$ não é uma acção externa e sim interna.

Exemplo 3.5.6. [**inclusão** *versus* **produto cruzado** *num factor*]

Sejam G um grupo finito tal que $|G| = n$ e $\{e_{x,y}\}_{x,y\in G}$ a família das matrizes da unidade de $Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$. Defina-se uma acção $\alpha : G \to Aut(Mat_{n\times n}(\mathbb{C}))$ implementada por

$$g \bullet e_{x,y} = e_{gx,gy}.$$

Usando a técnica da Proposição 2.2.25 podemos provar que

$$Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \rtimes_{\alpha} G \simeq Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \otimes Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \simeq Mat_{n^2\times n^2}(\mathbb{C}).$$

Fazendo $n = 2$, e usando $*$ para representar um qualquer elemento genérico de $\mathbb{C}$, procuremos P tal que

$$Mat_{2\times 2}(\mathbb{C}) = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \subseteq P \subseteq \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} = Mat_{2^2\times 2^2}(\mathbb{C}).$$

Com

$$P=\begin{bmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

vem que não existe $H\leq G$ tal que $P=Mat_{2\times 2}\left(\mathbb{C}\right)\rtimes_{\alpha}H$ apesar de P ser uma álgebra de von Neumann, pois $H\leq\mathbb{Z}_2$ implica que $H\in\left\{\{0\},\mathbb{Z}_2\right\}$, obrigando a que $P\in\left\{\{0\},Mat_{2^2\times 2^2}\left(\mathbb{C}\right)\right\}$, o que é absurdo. O que falha nesta conjuntura é que

$$Mat_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)\ \textbf{é um factor finito}.$$

Constata-se aqui a importância de trabalhar com factores do tipo $\mathbf{II}_1$.

Observação 3.5.7. *A Observação 3.5.2, a Proposição 3.5.3 e os Exemplos 3.5.5 e 3.5.6 explicam o porquê do uso da Teoria de Galois por acção de grupos finitos em factores do tipo* **II**. *Esta Teoria não é válida para factores do tipo* **I**.

3.6 $Gal\left(\mathbf{R}^H,\mathbf{R}^G\right)$ e $Gal\left(\mathbf{R}\rtimes G,\mathbf{R}\rtimes H\right)$ com H normal em G

Referências: [13, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 34]

Teorema 3.6.1. $\left[\right.$**Grupo de Galois na inclusão** $\left(\mathbf{R}^G\subseteq\mathbf{R}\right)\left.\right]$ *Seja M um factor do tipo* $\mathbf{II}_1$ *e considere-se a acção livre $\alpha:G\longrightarrow Aut(M)$. Então, temos que*

$$Gal(M,M^G)\cong G$$

Demonstração. O grupo de Galois $Gal(M,M^G)$ é finito e actua livremente sobre M, visto que $\left(M^G\right)'\cap M=\mathbb{C}id$, pelo Teorema 2.2.11, aplicando $(\mathbf{2})$ do Teorema 3.3.15 e $(\mathbf{3})$ da Proposição 3.3.14. Assim, $M^{Gal(M,M^G)}$ é um subfactor de M. As inclusões

$$M^G\subseteq M^{Gal(M,M^G)}\subseteq M \tag{3.8}$$

implicam que

$$\left[M:M^{Gal(M,M^G)}\right]\leq\left[M:M^G\right], \tag{3.9}$$

e que

$$\left|Gal(M,M^G)\right|\leq|\alpha(G)|. \tag{3.10}$$

Por (3.9) vem que

$$\left|Gal(M,M^G)\right|\geq|\alpha(G)|. \tag{3.11}$$

Como os grupos são finitos, vem que

$$Gal(M,M^G)=\alpha(G),$$

e logo

$$Gal(M,M^G)\cong G.$$

□

Observação 3.6.2. *$G/[G,G]$ é o conjunto dos **caracteres de dimensão** 1 de G.*

Teorema 3.6.3. [**Grupo de Galois em** $(M \subseteq M \rtimes_\alpha G)$] *Seja M um factor do tipo $\mathbf{II}_1$ e considere-se a acção externa $\alpha : G \to Aut(M)$. Se $[G,G]$ é o subgrupo comutador de G temos que $Gal(M \rtimes_\alpha G, M) \cong G/[G,G]$*

Demonstração. Seja $\varphi \in Gal(M \rtimes_\alpha G, M)$. Então, como φ fixa os elementos de M, por definição, vem que

$$\varphi\left(\sum_{g\in G} m_g u_g\right) = \sum_{g\in G} m_g \varphi\left(u_g\right), \tag{3.12}$$

pela definição de morfismo. Será que

$$\varphi\left(u_g\right) = \chi(g) u_g, \text{ com } \chi(g) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,?$$

Vejamos que

$$\varphi\left(u_g\right) u_g^* \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema 2.2.11}}}{=} \mathbb{C} id_{M\rtimes_\alpha G}.$$

Ora, dado $a \in M$ vem que $\varphi\left(u_g\right) u_g^* \in M' \cap (M \rtimes_\alpha G)$ se e só se

$$\left(\varphi\left(u_g\right) u_g^*\right) a = a\left(\varphi\left(u_g\right) u_g^*\right).$$

Mas

$$\begin{array}{rcl}
\left(\varphi\left(u_g\right) u_g^*\right) a & = & a\left(\varphi\left(u_g\right) u_g^*\right) \\
 & \Updownarrow & (\text{Teorema 2.2.7}) \\
\varphi\left(u_g\right) \alpha_g^*(a) u_g^* & = & a\varphi\left(u_g\right) u_g^* \\
 & \Updownarrow & \left(\text{Produto à direita por } u_g\right) \\
\varphi\left(u_g\right) \alpha_g^*(a) & = & a\varphi\left(u_g\right) \\
 & \Updownarrow & \left(\varphi|_M = id_M, \varphi \in Aut\left(M \rtimes_\alpha G\right)\right) \\
\varphi\left(u_g \alpha_g^*(a)\right) & = & \varphi\left(a u_g\right) \\
 & \Updownarrow & \left(\text{Composição à esquerda por } \varphi^{-1}\right) \\
u_g \alpha_g^*(a) & = & a u_g \\
 & \Updownarrow & \left(\text{Produto à esquerda por } u_g^*\right) \\
\alpha_g^*(a) & = & u_g^* a u_g \\
 & \Updownarrow & \left(h = g^{-1}\right) \\
\alpha_h(a) & = & u_h a u_h^*.
\end{array}$$

Como a acção α é implementada por unitários, vem que $\varphi\left(u_g\right) u_g^* = \chi(g) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, i.e., atendendo à natureza de unitário de $\varphi\left(u_g\right) u_g^*$,

$$\varphi\left(u_g\right) = \chi(g) u_g, \text{ com } \left|\chi_g\right| = 1. \tag{3.13}$$

Por outro lado, por (3.12) e por (3.13) vem que

$$\varphi(a) = a\varphi(u_{id_G}) = a\chi(id_G)u_{id_G} = \chi(id_G)a = \chi(id_G)\varphi(a),$$

pelo que

$$\chi(id_G) = 1. \tag{3.14}$$

Assim, $\varphi \in Gal(M \rtimes_\alpha G, M)$ implica que existe $\chi : G \to \mathbf{T}$ tal que

$$\varphi\left(\sum_{g\in G} m_g u_g\right) = \sum_{g\in G} \chi\left(g\right) m_g u_g. \tag{3.15}$$

Falta verificar que χ é carácter de G, pelo que devemos ter

$$\chi\left(ghg^{-1}\right) = \chi\left(h\right). \tag{3.16}$$

Ora, seja

$$x := \sum_{h\in G} m_h u_h, \text{ com } m_h \in M.$$

Assim,

$$\begin{aligned} u_g x u_g^* &= \sum_{h\in G} u_g m_h u_h u_g^* \\ &= \sum_{h\in G} \alpha_g\left(m_h\right) u_g u_h u_g^* \\ &= \sum_{h\in G} \alpha_g\left(m_h\right) u_{gh} u_{g^{-1}} \\ &= \sum_{h\in G} \alpha_g\left(m_h\right) u_{ghg^{-1}}, \end{aligned}$$

pelo que

$$\varphi\left(u_g x u_g^*\right) = \sum_{h\in G} \chi\left(ghg^{-1}\right) \alpha_g\left(m_h\right) u_{ghg^{-1}}.$$

Por outro lado, sendo φ um morfismo, vem que

$$\begin{aligned} \varphi\left(u_g x u_g^*\right) &= \varphi\left(u_g\right) \varphi\left(x\right) \varphi\left(u_g^*\right) \\ &= \chi\left(g\right) u_g \left(\sum_{h\in G} \chi\left(h\right) m_h u_h\right) \overline{\chi\left(g\right)} u_g^* \\ &= \sum_{h\in G} \chi\left(h\right) u_g m_h u_h u_g^* \\ &= \sum_{h\in G} \chi\left(h\right) \alpha_g\left(m_h\right) u_{ghg^{-1}}. \end{aligned}$$

Conclui-se assim, (3.16), pela independência dos unitários. Finalmente, vem que

$$Gal(M \rtimes_\alpha G, M) \simeq \left\{\chi : G \to \mathbf{T} \mid \chi(id_G) = 1, \chi\left(ghg^{-1}\right) = \chi\left(h\right)\right\},$$

conjunto de caracteres de dimensão 1 de G. Pela Teoria de Grupos (e.g., [9], pp 280-281) sai então que

$$Gal(M \rtimes_\alpha G, M) \cong G/\left[G, G\right]$$

□

Teorema 3.6.4. *Sejam G um grupo finito, $\alpha : G \to Aut\left(\mathbf{R}\right)$ uma acção externa e $H \trianglelefteq G$. Então*

1. $Gal\left(\mathbf{R}^H, \mathbf{R}^G\right) \simeq G/H$;
2. $Gal\left(\mathbf{R} \rtimes_\alpha G, \mathbf{R} \rtimes_\alpha H\right) \simeq \frac{G/H}{[G/H, G/H]}$.

Demonstração. Trivial, por combinação do Teorema 3.2.4 com os Teoremas 3.6.1 e 3.6.3, respectivamente.

□

Exemplo 3.6.5. [**Índice de Jones** *versus* **grupo de Galois**]

Seja $G = S_3$, *grupo simétrico em três letras*. Uma presentação de S_3 é dada por

$$S_3 = \left\{r, s : r^3 = s^2 = e, rsrs = e\right\},$$

onde podemos escolher $r = (123)$ e $s = (12)$. Ora, $[S_3, S_3] = A_3 \trianglelefteq S_3$, pelo que

$$Gal\left(M, M^{S_3}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema 3.6.1}}}{\cong} S_3$$

e

$$Gal\left(M \rtimes_\alpha S_3, M\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema 3.6.3}}}{\cong} S_3/A_3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teoria de Grupos}}}{\cong} \mathbb{Z}_2.$$

Para o índice de Jones temos que

$$\left[M : M^{S_3}\right] = [M \rtimes_\alpha S_3 : M] = |S_3| = 6.$$

Assim, as inclusões $\left(M^{S_3} \subseteq M\right)$ e $(M \subseteq M \rtimes_\alpha S_3)$ *têm grupos de Galois diferentes mas o mesmo índice de Jones*. Conclui-se que, neste caso, o índice de Jones não distingue as inclusões, ao contrário do que acontece com o grupo de Galois. Logo, *o grupo de Galois é um invariante com uma medida mais precisa do que o índice de Jones*. Por outro lado, se fizermos $M = \mathbf{R}$ vem que

$$Gal(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{S_3}) \cong S_3$$

e que

$$Gal(\mathbf{R} \rtimes_\alpha S_3, \mathbf{R}) \cong \mathbb{Z}_2 \ncong S_3,$$

pelo que para o grupo de Galois as inclusões $\left(\mathbf{R}^{S_3} \subseteq \mathbf{R}\right)$ e $(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha S_3)$ não são conjugadas, ainda que o sejam para o índice de Jones. Por outro lado,

$$2 = |Gal(\mathbf{R} \rtimes_\alpha S_3, \mathbf{R})| < [\mathbf{R} \rtimes_\alpha S_3 : \mathbf{R}] = 6,$$

pelo que temos uma cisão com o **caso clássico**, onde se tem sempre que

$$|Gal(\mathbf{B}, \mathbf{A})| = \left[\mathbf{B} : \mathbf{A}\right].$$

Exemplo 3.6.6. $\left[\textbf{Estudo das inclusões } \left(\mathbf{R}^{S_n} \subseteq \mathbf{R}^{A_n}\right) \textbf{ e } \left(\mathbf{R} \rtimes_\alpha S_n \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha A_n\right)\right]$

Seja S_n o grupo simétrico em n símbolos e A_n o grupo alterno respectivo, a saber: subgrupo das permutações pares de S_n. É sabido que A_n é o subgrupo normal de S_n, pelo que $A_n \trianglelefteq S_n$. Tem-se que $|A_n| = \frac{n!}{2}$ e que $[S_n : A_n] = 2$. Assim,

$$Gal\left(\mathbf{R}^{A_n}, \mathbf{R}^{S_n}\right) \underset{\underset{A_n \trianglelefteq S_n}{\uparrow}}{\simeq} Gal\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{S_n/A_n}\right) \underset{\underset{\text{Teorema 3.6.1}}{\uparrow}}{\cong} S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2.$$

Como

$$[S_n/A_n, S_n/A_n] = [\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2] = \{id\}$$

vem que

$$Gal\left(\mathbf{R} \rtimes_\alpha S_n, \mathbf{R} \rtimes_\alpha A_n\right) \underset{\underset{A_n \trianglelefteq S_n}{\uparrow}}{\simeq} Gal\left(\mathbf{R} \rtimes_\alpha (S_n/A_n), \mathbf{R}\right) \underset{\underset{\text{Teorema 3.6.3}}{\uparrow}}{\cong} S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2.$$

No caso $n = 3$ tem-se que $A_3 = \mathbb{Z}_3$.

3.7 Correspondência de Galois de $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H$ com H normal em G

Referências: [13, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 34]

Teorema 3.7.1. $\left[\textbf{Correspondência para a inclusão } \left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}\right)\right]$ *Sejam G um grupo finito, $\alpha : G \to Aut(\mathbf{R})$ uma acção externa sobre $\mathbf{R}$ e $(\mathbf{R}^G)'$ finito. Então, o reticulado de todos os subgrupos $H \leq G$ e o reticulado de todos os subfactores intermédios entre $\mathbf{R}^G$ e $\mathbf{R}$ são dualmente isomorfos pela correspondência de Galois, que transforma um subgrupo H num subfactor Q, invariante, elemento a elemento, por $\alpha|_H$. Esquematicamente temos*

$$H \leq G \quad \longleftrightarrow \quad M^G \subseteq Q \subseteq M \tag{3.17}$$

Demonstração. Dado um qualquer subgrupo $H \leq G$, a correspondência da Proposição 3.1.18 e a correspondência da Proposição 3.1.18 transformam H num subfactor Q cujo comutante P' é gerado por $\mathbf{R}'$ e H, onde cada elemento $p \in P$ comuta com u_h, para cada $h \in H$, pelo que Q é invariante elemento a elemento por $\alpha|_H$. Reciprocamente, um subfactor Q, intermediário entre $\mathbf{R}^G$ e $\mathbf{R}$, que é invariante por $\alpha|_H$, corresponde naturalmente a H.

□

Teorema 3.7.2. $\left[\textbf{Correspondência para a inclusão } \left(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G\right)\right]$ *Sejam G um grupo finito, $\alpha : G \to Aut(\mathbf{R})$ uma acção externa sobre $\mathbf{R}$ e P uma álgebra de von Neumann tal que $\mathbf{R} \subseteq P \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G$. Então, temos que*

$$P = \mathbf{R} \rtimes_{\alpha|_H} H, \text{ onde } H = \left\{g \in G : u_g \in P\right\}.$$

Esquematicamente vem que

$$H \leq G \quad \longleftrightarrow \quad M \subseteq P \subseteq M \rtimes_\alpha G \tag{3.18}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.13 vem que $\mathbf{R} \rtimes_\alpha G$ é factor finito. Seja

$$\mathcal{E}_P : \mathbf{R} \rtimes_\alpha G \to P$$

a esperança condicional de $\mathbf{R} \rtimes_\alpha G$ sobre P. (A demonstração da existência de $\mathcal{E}_P$ pode consultar-se em [37]).

Vejamos que $\mathcal{E}_P\left(u_g\right) = 0$, para todo o $g \in G \backslash H$.

Como P é álgebra de von Neumann (e logo com identidade) vem que $H \leq G$. Usando a Definição 3.1.3, vem que para cada $g \in G$ e para cada $x \in M \subseteq P$

$$x\mathcal{E}_P\left(u_g\right) = \mathcal{E}_P\left(xu_g\right) = \mathcal{E}_P\left(u_g u_g^* x u_g\right) = \mathcal{E}_P\left(u_g\right) u_g^* x u_g.$$

Pelo Teorema 2.2.7 vem que $u_g^* x u_g \in P$. Temos que

$$\mathcal{E}_P\left(u_g\right) u_g^* \in \mathbf{R}' \cap \left(\mathbf{R} \rtimes_\alpha G\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema 2.2.11}}}{=} \mathbb{C} id_{\mathbf{R} \rtimes_\alpha G}$$

Como $\mathbf{R}$ é factor, vem que $\mathcal{E}_P\left(u_g\right) = \lambda u_g$ para um certo escalar λ. Se $\lambda \neq 0$ então $u_g \in H$.

Logo, fica provado que $\mathcal{E}_P\left(u_g\right) = 0$, para todo o $g \in G \backslash H$, como pretendido.

Seja $x \in P \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G$. Usando o esquema de Turumaru vem que

$$x = \sum_{g \in G} x_g \otimes g,$$

pelo que

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{E}_P(x) = \sum_{g \in G} x_g \mathcal{E}_P\left(u_g\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \left(\mathcal{E}_P\left(u_g\right)=0, \text{ quando } g \in G \backslash H\right)}}{=} \sum_{g \in H} x_g \mathcal{E}_P\left(u_g\right) \\ &= \sum_{g \in H} x_g u_g \in \mathbf{R} \rtimes_{\alpha|_H} H. \end{aligned}$$

Logo,

$$P = \mathbf{R} \rtimes_{\alpha|_H} H.$$

□

Teorema 3.7.3. $\left[\right.$**Correspondência para a inclusão** $\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right)$ **com** $H \trianglelefteq G\left.\right]$ *Sejam G um grupo finito e $H \trianglelefteq G$. Então vale a correspondência de Galois*

$$\widetilde{H} \leq G/H \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^G \subseteq Q \subseteq \mathbf{R}^H \tag{3.19}$$

Demonstração. Se $H \trianglelefteq G$ vem que G/H é grupo. Da aplicação do esquema (3.17), vem a correspondência

$$\widetilde{H} \leq G/H \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^{G/H} \subseteq Q \subseteq \mathbf{R}$$

Por aplicação da conjugação (3.2) sai o resultado.

□

Teorema 3.7.4. [**Correspondência para a inclusão** $(\mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$ **com** $H \trianglelefteq G$] *Sejam G um grupo finito e $H \trianglelefteq G$. Então vale a correspondência de Galois*

$$\widetilde{H} \leq G/H \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq P \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G \tag{3.20}$$

Demonstração. Se $H \trianglelefteq G$ vem que G/H é grupo. Da correspondência (3.18), vem a correspondência

$$\widetilde{H} \leq G/H \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R} \subseteq \widetilde{P} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G/H$$

entre subgrupos de G/H e sub-álgebras $\widetilde{P} = \mathbf{R} \rtimes_\alpha \widetilde{H}$.

Da conjugação (3.5) sai o resultado.

□

Observação 3.7.5. *A correspondência de Galois do Teorema 3.7.1 é um caso particular da correspondência de Galois do Teorema 3.7.3 e a correspondência de Galois do Teorema 3.7.2 é um caso particular da correspondência de Galois do Teorema 3.7.4, com $H = \{id\}$.*

Esquema 3.7.6. *O uso dos Teoremas 3.7.1 e 3.7.2 permitem-nos sumarizar que*

reticulado dos subgrupos H de G	$\underset{isomorfo}{\overset{\textbf{dualmente}}{\longleftrightarrow}}$	reticulado dos subfactores intermédios P de $\mathbf{R}^G \subseteq P \subseteq \mathbf{R}$,

e que

reticulado dos subgrupos K de G	$\underset{isomorfo}{\overset{\textbf{directamente}}{\longleftrightarrow}}$	reticulado dos subfactores intermédios Q de $\mathbf{R} \subseteq Q \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G$,

onde

$$H = \left\{g \in G : \alpha_g(x) = x, \forall x \in P\right\}, \qquad K = \{g \in G : u_g \in Q\}$$

e

$$P = \mathbf{R}^H, \qquad Q = \mathbf{R} \rtimes_\alpha H.$$

Esquema 3.7.7. *O uso dos Teoremas 3.7.3 e 3.7.4 permitem-nos sumarizar que*

$$\begin{array}{l|c|l} \text{reticulado dos} & & \text{reticulado dos subfactores} \\ \text{subgrupos} & \underset{\mathit{isomorfo}}{\overset{\textbf{dualmente}}{\longleftrightarrow}} & \text{intermédios } \widetilde{P} \\ \widetilde{H} \text{ de } G/H & & \text{de } \mathbf{R}^G \subseteq \widetilde{P} \subseteq \mathbf{R}^H, \end{array}$$

e que

$$\begin{array}{l|c|l} \text{reticulado dos} & & \text{reticulado dos subfactores} \\ \text{subgrupos} & \underset{\mathit{isomorfo}}{\overset{\textbf{directamente}}{\longleftrightarrow}} & \text{intermédios } \widetilde{Q} \text{ de} \\ \widetilde{H} \text{ de } G/H & & \mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \widetilde{Q} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G, \end{array}$$

onde usamos o Esquema 3.7.6 e as conjugações

1. $\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right) \sim \left(\mathbf{R}^{G/H} \subseteq \mathbf{R}\right)$
2. $(\mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G) \sim (\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha (G/H))$.

Apêndice A

Preliminares

A.1 Noções base

Referências: [8, 9, 10, 18, 27, 28, 33]

Definição A.1.1. ***Espaço*** *é um qualquer conjunto não-vazio, eventualmente com propriedades de estrutura.*

> O conceito de *espaço* está longe de ser trivial. Veja-se, por exemplo, [10]. Contudo, do ponto de vista Matemático, esta definição é robusta.

Definição A.1.2. ***Sistema algébrico*** *é todo o par (**conj**, **op**) em que **conj** é uma família não vazia de conjuntos em que **op** é uma família não-vazia de operações sobre os elementos de **conj**. A **conj** damos o nome de suporte do sistema algébrico.*

> Nos casos em que **conj** é uma família singular comete-se o habitual abuso de linguagem de identificar a família singular com o elemento constitutivo.
>
> Exemplos de sistemas algébricos: *grupóide*, *semigrupo*, *monóide*, *grupo*, *anel*, *anel com identidade*, *anel de divisão*, *corpo*, *espaço vectorial*.

Definição A.1.3. *Seja G um grupo. O **centralizador** de $g \in G$, denotado por $\mathcal{C}(g)$, é o conjunto dado por $\{h \in G : hg = gh\}$.*

Definição A.1.4. *Seja G um grupo. O **comutante** de $S \subseteq G$, denotado por S', é o conjunto dado por $\{g \in G : sg = gs, \text{ para todo } s \in S\}$.*

Definição A.1.5. *Seja G um grupo. O **centro** de G, denotado por $\mathcal{Z}[G]$, é o conjunto dado por $\{g \in G : hg = gh, \text{ para todo } h \in G\}$.*

Definição A.1.6. *Seja G um grupo e $H \subseteq G$. O **normalizador** de H em G, denotado$\mathcal{N}(G, H)$, é o conjunto dado por $\{x \in G : xH = Hx\}$.*

Observação A.1.7. *Dado um grupo G e $H \leq G$ o normalizador de H em G é o maior subgrupo de G contendo H como subgrupo normal, sendo que $\mathcal{N}(G, H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.*

Definição A.1.8. *Seja G um grupo. Existe uma* ***relação de conjugação entre dois elementos*** *$g, h \in G$ se existe um $x \in G$ tal que $g = xhx^{-1}$, e escrevemos $g \backsim h$.*

Proposição A.1.9. *A relação de conjugação $\backsim$ é uma* ***relação de equivalência****.*

Demonstração. Sejam G um grupo e $g, h, t, e \in G$, sendo e o elemento neutro de G.
Temos que $g = ege^{-1}$, pelo que $\backsim$ é **reflexiva**.
Seja $g \backsim h$. Então, existe $x \in G$ tal que $g = xhx^{-1}$.
Ora, $g = xhx^{-1} \iff xhx^{-1} = g \iff h = x^{-1}gx$.
Fazendo $y = x^{-1}$ vem que $g = xhx^{-1} \iff h = ygy^{-1} \iff h \backsim g$.
Logo, $\backsim$ é **simétrica**.
Sejam $g \backsim h$ e $h \backsim t$. Então, existem $x, y \in G$ tais que $g = xhx^{-1}$ e $h = yty^{-1}$.
Assim, $g = x(yty^{-1})x^{-1} = (xy)t(y^{-1}x^{-1}) = (xy)t(xy)^{-1}$.
Fazendo $z = xy$ vem que $g = ztz^{-1}$, com $z \in G$, pelo que $g \backsim t$.
Logo, $\backsim$ é **transitiva**.
Conclui-se que $\backsim$ é uma *relação de equivalência*. □

Definição A.1.10. ***Acção*** *de G sobre S é todo o homomorfismo $\alpha : G \to Perm(S)$, onde G é um grupo, S é um espaço e $Perm(S)$ é o grupo das permutações do espaço S.*

Observação A.1.11. *Dada uma acção $\alpha : G \to Perm(S)$, a imagem de um elemento $g \in G$ é uma permutação sobre S. Usando a notação das sucessões, podemos fazer a identificação $\alpha(g) \equiv \alpha_g$. Assim, a* ***acção*** *α pode encarar-se como uma* ***família de permutações indexada em*** *G.*

Observação A.1.12. *Uma acção α pode formalizar-se na forma $G \times S \to S$, ao invés da forma $G \to Perm(S)$. Se fizermos a identificação $\alpha_g(s) \equiv g * s$, com $g \in G$ e $s \in S$, valem as seguintes propriedades:*

1. $g * (h * s) = (gh) * s$, quaisquer que sejam $g, h \in G$ e $s \in S$.

2. $e * s = s$, qualquer que seja $s \in S$, onde e é o elemento neutro de G.

Observação A.1.13. *Se tivermos $\alpha : G \times S \to S$, com $(g, h) \mapsto g * h$, verificando as propriedades 1 e 2, para cada $g \in G$, vem que $g \mapsto g * s$ é uma permutação de S, denotada por $\alpha_g(s)$. Assim, $g \mapsto \alpha_g$ é um homomorfismo de G em $Perm(S)$. Desta forma, é possível definir uma* ***acção de*** *G* ***sobre*** *S como sendo uma aplicação satisfazendo as propriedades 1 e 2, denotada $\alpha : G \times S \to S$, com $(g, h) \mapsto g * h$. Combinando estas duas formas de encarar a acção temos que $g * s = \alpha_g(s)$.*

Observação A.1.14. *Quando S é o suporte de um sistema algébrico, como um grupo ou de um anel, a nossa definição de acção é mais restritiva, substituindo-se $Perm(S)$ por $Aut(S)$, conjunto dos automorfismos de S em S. Isto é, não estamos interessados em apenas permutar os elementos de S;* ***as permutações devem respeitar a estrutura de*** *S.*

Observação A.1.15. *A definição de acção como $\alpha : G \to Perm(S)$ é mais adequada para* ***exposições formais****, enquanto que acção como $\alpha : G \times S \to S$ adequa-se mais a uma* ***plataforma operacional****.*

Definição A.1.16. *Dada uma acção $\alpha : G \times S \to S$, a* ***órbita*** *de $s \in S$ define-se por*

$$Orb(s) = \{t \in S : \text{existe } g \in G \text{ tal que } t = g * s\}.$$

Definição A.1.17. *Dada uma acção $\alpha : G \times S \to S$, o* ***estabilizador*** *de $s \in S$ define-se por*

$$Stab(s) = \{g \in G : g * s = s\}.$$

Definição A.1.18. *Dada uma acção $\alpha : G \times S \to S$, $s \in S$ é* ***ponto fixo*** *por α se $g * s = s$, para cada $g \in G$.*

Definição A.1.19. *Dada uma acção $\alpha : G \times S \to S$, o* ***conjunto dos pontos fixos*** *é dado por*

$$\begin{aligned} S_0 &= \{s \in S : s \text{ é ponto fixo de } S, \text{ por intermédio de } \alpha\} \\ &= \{s \in S : g * s = s, \text{ para cada } g \in G\} \\ &= \{s \in S : |Orb(s)| = 1\} \end{aligned}$$

Proposição A.1.20. *Seja $H \leq G$. O grupo H actua no conjunto $S = G$ por* ***translação esquerda****.*

Demonstração. Ora, H actua em G por translação esquerda se, para cada $h \in H$ e para cada $g \in G$, $h * g = hg$. Para verificar que isto define uma acção de grupo, deve notar-se que para todo $x \in G$ e para $h_1, h_2 \in H$ tem-se que

$$e * s = es = s$$

e que

$$h_1 * (h_2 * s) = h_1 * (h_2 s) = h_1(h_2 s) = (h_1 h_2)s = (h_1 h_2) * s.$$

□

Observação A.1.21. *Nas condições da proposição, se $s \in G$, então*

$$Orb(s) = \{g \in G : g = hs \text{ para algum } h \in H\} = Hs$$

e

$$Stab(s) = \{h \in H : hs = s\} = \{e\}.$$

Se $s \in G$, então s é um ponto fixo se, e só se, $hs = s$ para todo $h \in H$. Assim, $S_0 = G$ se H é o grupo trivial e $S_0 = \varnothing$ se H não é o grupo trivial.

Definição A.1.22. *Seja G um grupo. A órbita por conjugação de um elemento $g \in G$ é uma classe de equivalência a que damos o nome de* ***classe de conjugação*** *de g, e denota-se por $[g]$.*

Proposição A.1.23. *O grupo G actua no conjunto $S = G$ por* ***conjugação****.*

Demonstração. Ora, G actua por conjugação em G se

$$g, s \in G \Longrightarrow g * s = gsg^{-1}.$$

Temos que dados $g, h, s \in G$

$$e * s = ese^{-1} = se = s$$

e

$$g * (h * s) = g * (hsh^{-1}) = (gh)s(h^{-1}g^{-1}) = (gh)s(gh)^{-1} = (gh) * s.$$

□

Observação A.1.24. *Nas condições da Proposição A.1.23 se $s \in G$, então*

$$Orb(s) = \{g \in G : g = hsh^{-1} \text{ para algum } h \in H\}$$

e

$$\begin{aligned} Stab(s) &= [s] = \{g \in G : g * s = s\} \\ &= \{g \in G : gsg^{-1} = s\} = \{g \in G : gs = sg\} \\ &= \mathcal{C}(s). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$S_0 \equiv G_0 = \mathcal{Z}[G]$$

Proposição A.1.25. *Seja G um grupo e seja $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os subgrupos de G. Então G actua em $\mathcal{H}$ por conjugação.*

Demonstração. Se $g \in G$ e $H \leq G$ então $g * H = gHg^{-1}$. Seja $e \in G$ o elemento neutro de G e sejam $g, h \in G$. Assim, temos que

$$e * H = eHe^{-1} = H$$

e que

$$g * (h * H) = g * (hHh^{-1}) = (gh)H(h^{-1}g^{-1}) = (gh)H(gh)^{-1} = (gh) * H.$$

□

Observação A.1.26. *Se $H \leq G$, temos*

$$Orb(H) = \{K \in \mathcal{H} : K = gHg^{-1} \text{ para algum } g \in G\},$$

pelo que a órbita de H é o conjunto dos conjugados de H em G. Se $H \leq G$, temos

$$Stab(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\} = \mathcal{N}(G, H).$$

Observação A.1.27. *Se $H \leq G$, então H é ponto fixo por acção de $*$ se, e só se, $gHg^{-1} = H$ para todo $g \in G$. Segue-se que*

$$\mathcal{H}_0 = \{H : H \trianglelefteq G\} \equiv \{H : H \text{ é subgrupo normal de } G\}$$

Definição A.1.28. *Seja G um grupo. Um **comutador** em G é todo o elemento da forma $xyx^{-1}y^{-1}$, com $x, y \in G$. Dados os elementos $x, y \in G$, o seu comutador denota-se por*

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$$

Definição A.1.29. *Seja G um grupo. Denotamos por $[G, G]$ o subgrupo de G formado pelos comutadores de G, e denominamos este subgrupo de **subgrupo comutador** ou **subgrupo derivado**, i.e.,*

$$[G, G] = \left\{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\right\}$$

Observação A.1.30. *Seja G um grupo. $[G,G]$ é um subgrupo normal de G, i.e., $[G,G] \trianglelefteq G$. Por outro lado, se H é grupo abeliano e $Hom\,(G,H) \ni f : G \to H$ então $Ker(f) = [G,G]$. Assim, $G/\,[G,G]$ é um grupo.*

Proposição A.1.31. *Seja G um grupo. Então, $G/\,[G,G]$ é um grupo abeliano.*

Demonstração. Considere-se a função $f : G \to G/\,[G,G]$ e representemos $f(x)$ por $\widetilde{x}$. Por definição, temos que $\widetilde{x}\widetilde{y}\,(\widetilde{x})^{-1}\,(\widetilde{y})^{-1} = \widetilde{e}$, pelo que $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ comutam para quaisquer $x, y \in G$.

□

Definição A.1.32. *Dado um grupo G chamamos **série derivada** de G à sequência*

$$(D_0, D_1, D_2, \cdots, D_k, \cdots),$$

onde

$$\begin{aligned} D_0 &:= G, \\ D_n &:= [D_{n-1}, D_{n-1}]\,, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Observação A.1.33. *Dada uma série derivada $(D_0, D_1, D_2, \cdots, D_k, \cdots)$, associada ao grupo G, prova-se que $D_n \trianglelefteq D_{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Definição A.1.34. *Um grupo G diz-se **grupo resolúvel** quando na determinação da série derivada existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $D_n = \{e\}$, onde "e"é o elemento neutro de G.*

Definição A.1.35. ***Representação de um grupo** G num espaço S é todo o par ordenado (α, S), onde $\alpha : G \to Perm(S)$ é uma acção.*

> Muitos autores dão o nome de representação ao que denominamos aqui de acção. É preciso contextualizar devidamente a terminologia.

Definição A.1.36. ***Espaço vectorial***

Espaço vectorial é um sistema algébrico $(\mathbf{conj}, \mathbf{op})$ em que $\mathbf{conj} = \{\Bbbk, \mathbf{G}\}$ e $\mathbf{op} = \{0, 1, +, ., \mathbf{0}, \oplus\}$, sendo que $(\Bbbk, \{0, 1, +, .\})$ é corpo, $(\mathbf{G}, \{\mathbf{0}, \oplus\})$ é grupo abeliano e existe uma *ligação* ($\lambda \in \Bbbk, x \in \mathbf{G} \Longrightarrow \lambda x \in \mathbf{G}$) que faz com que os elementos de $\Bbbk$ funcionem como operadores unários de $\mathbf{G}$. Os elementos de $\Bbbk$ tomam o nome de *escalares* e os de $\mathbf{G}$ de *vectores*. Assim, podemos pensar este sistema algébrico como $\mathbf{conj} = \{\mathbf{G}\}$ e $\mathbf{op} = \{\mathbf{0}\} \cup \{\lambda\}_{\lambda \in (\Bbbk, \{0,1,+,.\})} \cup \{\oplus\}$. Assim, um espaço vectorial é um sistema algébrico $(\mathbf{G}, \{\mathbf{0}, \oplus\} \cup \Bbbk)$. Usualmente $\Bbbk \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. No nosso contexto será sempre $\Bbbk = \mathbb{C}$. Esta abordagem tem a vantagem de destacar apenas o importante do espaço vectorial, abstraindo as operações sobre os escalares $\Bbbk$.

Para os mais puristas podemos dizer que um *espaço vectorial é uma qualquer representação de um corpo num grupo abeliano.*

> Não esquecer que 0, 1 e **0** são *operadores nulários*, que consistem na fixação de um elemento do(s) conjunto(s) de suporte. Por tradição fixam-se sempre os elementos neutros para as operações binárias em jogo, tendo o nome de

zero quando a operação binária é comutativa e o nome de **um** quando a operação binária não é necessáriamente comutativa.

Ao conjunto dos elementos de uma *base* vamos chamar de **construtores do espaço vectorial**.

Num espaço vectorial abstracto, identificam-se os *vectores com o alfabeto latino minúsculo* e os *escalares com o alfabeto grego minúsculo*.

Definição A.1.37. *Seja* $\mathbf{E}$ *um espaço. Uma aplicação* $m : \mathbf{E}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ *é uma* ***métrica*** *se for simétrica, transitiva e verificar* $m(x, y) = 0 \iff x = y$.

Definição A.1.38. ***Espaço métrico*** *é todo o par ordenado* $(\mathbf{E}, m)$ *em que* $\mathbf{E}$ *é um espaço e* m *é uma métrica.*

Definição A.1.39. ***Semi-norma***

Seja $(\mathbf{E}, \{\mathbf{0}, +\} \cup \mathbb{C})$ um espaço vectorial. damos o nome de *semi-norma* à uma qualquer aplicação $p : \mathbf{E} \to \mathbb{R}_0^+$ tal que:
a) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \forall_{\lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbf{E}}$;
b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall_{x,y \in \mathbf{E}}$.

As **semi-normas** são *construtores dos Espaços Vectoriais Topológicos* (**EVT**).

Definição A.1.40. ***Espaço de Fréchet*** *é um espaço métrico/metrizável completo.*

Um *Espaço Localmente Convexo* (**ELC**) - que é um **EVT** gerado por uma família de semi-normas - é um **espaço metrizável** se a família de semi-normas for contável, $\{p_i\}_{i \in \mathbf{F} \subseteq \mathbb{N}_0}$. Assim basta considerar a semi-norma $p = \sum\limits_{i \in \mathbf{F}} \frac{1}{2^i} \frac{p_i}{1+p_i}$, que é uma métrica.

Definição A.1.41. *Seja* $(\mathbf{E}, \{\mathbf{0}, +\} \cup \mathbb{C})$ *um espaço vectorial. Damos o nome de* ***norma*** *à uma qualquer semi-norma* $p : \mathbf{E} \to \mathbb{R}_0^+$ *tal que* $x \neq \mathbf{0} \implies p(x) \neq 0$.

Definição A.1.42. ***Espaço normado*** *é um espaço vectorial onde está definida uma norma.*

Um espaço normado é um **EVT** gerado por uma família finita de semi$-$normas.

Definição A.1.43. ***Espaço Banach*** *é um espaço normado completo, para a topologia/métrica da norma.*

Definição A.1.44. *Seja* $(\mathbf{E}, \{\mathbf{0}, +\} \cup \mathbb{C})$ *um espaço vectorial. O* ***produto interno*** *é uma aplicação* $p : \mathbf{E}^2 \to \mathbb{C}$*, linear na primeira componente, sesquilinear na segunda componente, anti-simétrica e tal que* $x \neq \mathbf{0} \implies p(x, x) \in \mathbb{R}^+$.

Entre os Físicos é costume definir produto interno ao contrário: a aplicação $p : \mathbf{E}^2 \to \mathbb{C}$ é *linear na segunda componente, sesquilinear na primeira componente*.

Definição A.1.45. ***Espaço pré-Hilbert*** *é um espaço vectorial onde está definido o conceito de produto interno.*

Definição A.1.46. ***Espaço Hilbert*** *é um espaço pré-Hilbert completo, para a topologia/métrica da norma associada ao produto interno.*

Definição A.1.47. *Sejam* $(\mathbf{E},\{\mathbf{0},+,||.||_{\mathbf{E}}\}\cup\mathbb{C})$ *e* $(\mathbf{F},\{\mathbf{0},+,||.||_{\mathbf{F}}\}\cup\mathbb{C})$ *espaços Banach.* $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ *é o* ***conjunto dos operadores lineares limitados*** *de* $\mathbf{E}$ *em* $\mathbf{F}$*. Quando* $\mathbf{E}=\mathbf{F}$ *fazemos* $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})\equiv\mathbf{L}(\mathbf{E})$.

Nos operadores temos: **linear limitado** $\Longleftrightarrow$ **contínuo**
Por direito próprio $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ e $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ são **EVT**´s.

Definição A.1.48. ***Álgebra*** *é um espaço vectorial* $(\mathbf{A},\{\mathbf{0},+\}\cup\mathbb{k})$*, onde se definiu uma operação binária* $\cdot$*, um tipo de produto, que o transforma em anel, e onde a relação entre o produto escalar e o produto de anel é dada pela transparência escalar:*

$$\lambda(a\cdot b)=(\lambda a)\cdot b=a\cdot(\lambda b),\forall_{\lambda\in\mathbb{k}}\forall_{a,b\in\mathbf{A}}.$$

Podemos representar uma álgebra por $(\mathbf{A},\{\mathbf{0},+,\cdot\}\cup\mathbb{k})$.

As *construções de álgebras* não recorrem usualmente aos espaços vectoriais simples; recorrem aos *espaços vectoriais topológicos*.

Dependendo da construção de álgebra posta em prática podemos, eventualmente, ter uma *álgebra com identidade* ou uma *álgebra de divisão*.

Quando a álgebra incide sobre os espaços vectoriais $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ ou $\mathbf{L}(\mathbf{E})$, estamos na presença de uma *álgebra de operadores*.

Definição A.1.49. *O* ***produto tensorial de matrizes*** *(ou produto de Kronecker) entre as matrizes* $A=(a_{ij})\in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$ *e* $B=(b_{kl})\in Mat_{p\times q}(\mathbb{C})$ *é dado por*

$$A\otimes B=(A\,b_{kl})\in Mat_{mp\times nq}(\mathbb{C})$$

A.2 Topologias de $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$

Referências: [27, 33]

Sejam $(\mathbf{E},\{\mathbf{0},+,\|\cdot\|_{\mathbf{E}}\}\cup\mathbb{C})$ e $(\mathbf{F},\{\mathbf{0},+,\|\cdot\|_{\mathbf{F}}\}\cup\mathbb{C})$ dois espaços Banach. Se um espaço for Hilbert vale a identificação $\|\cdot\|^2=|\langle\cdot,\cdot\rangle|$, e podemos reduzir a formalização válida para espaços Hilbert à formzlização válida para espaços Banach. Por outro lado, ao usarmos a convenção que traduz a instanciação de um funcional linear a um par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (em directa relação com o Teorema de Riesz), temos uma identificação formal entre estas duas formas de olhar para o mesmo. Existe também a simplificação que consiste em substituir a instanciação $x(\xi)$ por $x\xi$ quando ξ é um vector e x é um operador.

Normalmente, o uso do alfabeto latino maiúsculo para representar um operador é consistente com os operadores ilimitados. Quando em presença de operadores limitados é costume usar o alfabeto latino minúsculo. Nesse caso usa-se o albabeto grego minúsculo para representar os vectores, e o uso do alfabeto latino minúsculo deixa de ser absoluto: usa-se a convenção cartesiana para variáveis nos vectores e a convenção cartesiana para constantes nos escalares.

Não esquecer que *uma família de semi-normas define uma* ***sub-base*** *de uma topologia num espaço localmente convexo*. Como os nossos espaços de trabalho são **EVT**'s a caracterização de uma topologia reduz-se à sua caracterização num ponto do espaço. Assim, fixo um ponto do espaço e a família de semi-normas, vamos definir uma vizinhança do ponto pela escolha de uma subfamília finita do conjunto de índices das semi-normas.

De seguida, ao caracterizarmos uma vizinhança do ponto $x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ procedemos a uma instanciação em x, pelo que declinamos x na indexação das semi-normas, quando definimos a vizinhança. Dado um operador x usamos x^* para representar o operador adjunto de x.

Definição A.2.1. ***Topologia uniforme/[da norma] dos operadores***

Para cada operador $x : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ considere-se a semi-norma que é a norma do *operador*:

$$p_x = \sup_{||\xi||_{\mathbf{E}}=1} \{||x(\xi)||_{\mathbf{F}} : \xi \in \mathbf{E}\}.$$

A topologia gerada por $\{p_x\}_{x\in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})}$ é a *topologia uniforme dos operadores* ou *topologia da norma dos operadores*.

A família de índices é dada por $\mathbf{I} = \varnothing$.

A vizinhança-ε associada ao ponto $x_0 \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[\varnothing,\varepsilon](x_0) &= \{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : p(x-x_0) < \varepsilon\} \\ &= \left\{ x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : \sup_{||\xi||_{\mathbf{E}}=1} (\|(x-x_0)\xi\|_{\mathbf{F}}) < \varepsilon, \xi \in \mathbf{E} \right\} \end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ um **EVT**, e como para cada $x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ temos uma única semi-norma, $\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ é espaço normado com esta topologia.

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.norma*.

Não confundir ***norma do vector*** *com* ***norma do operador****!*

Definição A.2.2. ***Topologia forte dos operadores***

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$ considere-se a aplicação:

$$\begin{aligned} A_\xi &: \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \to \mathbf{F} \\ x &\mapsto A_\xi(x) = x(\xi) \end{aligned}$$

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$ e cada $x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ considerem-se as semi-normas:

$$p_{\xi,x} : x \mapsto \left\|A_\xi(x)\right\|_{\mathbf{F}} = \|x(\xi)\|_{\mathbf{F}}.$$

A topologia gerada por $\{p_{\xi,x}\}_{\xi\in\mathbf{E},x\in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})}$ é a *topologia forte dos operadores*.

A família de índices é dada por $\mathbf{I} = \mathbf{E}$. Se $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ é uma sub-família finita considere-se $\Omega_{\mathbf{J}} = \{\varepsilon_j > 0 : j \in \mathbf{J}\}$.

A vizinhança-Ω associada ao ponto $x_0 \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left[\mathbf{J},\Omega_{\mathbf{J}}\right](x_0) &= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : p_\xi(x-x_0) < \varepsilon_\xi,\ \xi \in \mathbf{J}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : \|(x-x_0)\xi\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon_\xi,\ \xi \in \mathbf{J}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : \|\langle x-x_0,\xi\rangle\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon_\xi,\ \xi \in \mathbf{J}\right\}
\end{aligned}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.forte*.

Definição A.2.3. ***Topologia forte-$*$ dos operadores***

Com $\xi \in \mathbf{E}$ considere-se a aplicação:

$$\begin{aligned}
A_\xi &: \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \to \mathbf{F} \\
x &\mapsto A_\xi(x) = x(\xi)
\end{aligned}$$

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$ e cada $x \in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ considerem-se as semi-normas:

$$p_{\xi,x} : x \mapsto \left\|A_\xi(x)\right\|_{\mathbf{F}} + \left\|A_\xi(x^*)\right\|_{\mathbf{F}} = \|x(\xi)\|_{\mathbf{F}} + \|x^*(\xi)\|_{\mathbf{F}}.$$

A topologia gerada por $\left\{p_{\xi,x}\right\}_{\xi\in\mathbf{E},x\in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})}$ é a *topologia forte-$*$ dos operadores*.

A família de índices é dada por $\mathbf{I} = \mathbf{E}$. Se $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ é uma sub-família finita considere-se $\Omega_{\mathbf{J}} = \left\{\varepsilon_j > 0 : j \in \mathbf{J}\right\}$.

A vizinhança-Ω associada ao ponto $x_0 \in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left[\mathbf{J},\Omega_{\mathbf{J}}\right](x_0) &= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : p_\xi(x-x_0) < \varepsilon_\xi,\ \xi \in \mathbf{J}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : \|(x-x_0)\xi\|_{\mathbf{F}} + \|(x^*-x_0^*)\xi\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon_\xi,\ \xi \in \mathbf{J}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : \|\langle x-x_0,\xi\rangle\|_{\mathbf{F}} + \|\langle x^*-x_0^*,\xi\rangle\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon_\xi,\ \xi \in \mathbf{J}\right\}
\end{aligned}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.forte-$*$*.

Definição A.2.4. ***Topologia σ-forte/ultraforte dos operadores***

Com $\xi \in \mathbf{E}$ considere-se a aplicação:

$$\begin{aligned}
A_\xi &: \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \to \mathbf{F} \\
x &\mapsto A_\xi(x) = x(\xi)
\end{aligned}$$

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$ e cada $x \in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ considerem-se as semi-normas:

$$p_{(\xi,x)} : x \mapsto \left\|A_\xi(x)\right\|_{\mathbf{F}} = \|x(\xi)\|_{\mathbf{F}}.$$

Construam-se agora as semi-normas que são séries quadráticas convergentes associadas às sucessões de semi-normas do tipo $p_{(\xi,x)}$, $\left(p_{(\xi_n,x)}\right)_n$, dadas por

$$p_{[(\xi_n)_n,x]} = \left(\sum_n p^2_{(\xi_n,x)}\right)^{1/2}.$$

A topologia gerada por

$$\left\{p_{[(\xi_n)_n,x]}:\quad \sum_n p^2_{(\xi_n,x)} < \infty,\ (\xi_n) \in \mathbf{E}^{\mathbb{N}},\ x \in \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)\right\}$$

é a *topologia $\sigma-$forte dos operadores*. A família de índices é dada por

$$\mathbf{I} = \left\{(\xi_n) \in \mathbf{E}^{\mathbb{N}}:\ \sum_n p^2_{(\xi_n,x)} < \infty\right\}.$$

Se $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ é uma sub-família finita considere-se $\Omega_{\mathbf{J}} = \left\{\varepsilon_j > 0 : j \in \mathbf{J}\right\}$.
A vizinhança-$\Omega_{\mathbf{J}}$ associada ao ponto $x_0 \in \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)$ é dada por:

$$\mathbf{V}\left[\mathbf{J},\Omega_{\mathbf{J}}\right](x_0) = \left\{x \in \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) : p_{[(\xi_n),x-x_0]} < \varepsilon_{(\xi_n)},\ (\xi_n) \in \mathbf{J}\right\}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.$\sigma-$forte*.

Definição A.2.5. ***Topologia σ-forte-$*$/ultraforte-$*$ dos operadores***

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$ vamos construir a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} A_\xi & : & \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) \to \mathbf{F} \\ x & \mapsto & A_\xi(x) = x(\xi) \end{array}$$

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$ e cada $x \in \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)$ considere-se:

$$p_{(\xi,x)} : x \mapsto \left\|A_\xi(x)\right\|^2_{\mathbf{F}} + \left\|A_\xi(x^*)\right\|^2_{\mathbf{F}} = \|x(\xi)\|^2_{\mathbf{F}} + \|x^*(\xi)\|^2_{\mathbf{F}}$$

e construam-se as semi-normas dadas por

$$p_{[(\xi_n)_n,x]} = \left(\sum_n p_{(\xi_n,x)}\right)^{1/2}.$$

A topologia gerada por

$$\left\{p_{[(\xi_n)_n,x]}:\quad \sum_n p_{(\xi_n,x)} < \infty,\ (\xi_n) \in \mathbf{E}^{\mathbb{N}},\ x \in \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)\right\}$$

é a *topologia $\sigma-$forte-$*$ dos operadores*. A família de índices é dada por

$$\mathbf{I} = \left\{(\xi_n) \in \mathbf{E}^{\mathbb{N}}:\ \sum_n p_{(\xi_n,x)} < \infty\right\}.$$

Se $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ é uma sub-família finita considere-se $\Omega_{\mathbf{J}} = \left\{\varepsilon_j > 0 : j \in \mathbf{J}\right\}$.
A vizinhança-$\Omega_{\mathbf{J}}$ associada ao ponto $x_0 \in \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)$ é dada por:

$$\mathbf{V}\left[\mathbf{J},\Omega_{\mathbf{J}}\right](x_0) = \left\{x \in \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) : p_{[(\xi_n),x-x_0]} < \varepsilon_{(\xi_n)},\ (\xi_n) \in \mathbf{J}\right\}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.σ−forte-∗*.

Definição A.2.6. ***Topologia fraca dos operadores***

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$ e para cada $f \in \mathbf{F}^*$ considerem-se as aplicações:

$$\begin{array}{rcl} A_{\xi,f} & : & \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto & A_{\xi,f}(x) = f(x(\xi)) \end{array}$$

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$, para cada $x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ e para cada $f \in \mathbf{F}^*$ considerem-se as semi−normas:

$$p_{\xi,x,f} : x \mapsto |f(x(\xi))|.$$

A topologia gerada por $\{p_{\xi,x,f}\}_{\xi\in\mathbf{E},x\in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}),f\in\mathbf{F}^*}$ toma o nome de *topologia fraca dos operadores*.

A família de índices é dada por $\mathbf{I} = \mathbf{E} \times \mathbf{F}^*$. Se $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ é uma sub-família finita, considere-se $\Omega_\mathbf{J} = \{\varepsilon_j > 0 : j \in \mathbf{J}\}$.

A vizinhança$-\Omega_\mathbf{J}$ associada ao ponto $x_0 \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[\mathbf{J},\Omega_\mathbf{J}](x_0) &= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : p_{(\xi,f)}(x - x_0) < \varepsilon_{(\xi,f)};\ (\xi,f) \in \mathbf{J}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : |f((x - x_0)\xi)| < \varepsilon_{(\xi,f)};\ (\xi,f) \in \mathbf{J}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : |\langle f,(x - x_0)\xi\rangle| < \varepsilon_{(\xi,f)};\ (\xi,f) \in \mathbf{J}\right\} \end{aligned}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.fraca*.

Definição A.2.7. ***Topologia vectorial fraca***

Para para cada $f \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})^*$ considere-se a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} A_f & : & \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Para cada $x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ e para cada $f \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})^*$ considerem-se as semi-normas:

$$p_{x,f} : x \mapsto |f(x)|.$$

A topologia gerada por $\{p_{x,f}\}_{x\in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}),f\in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})^*}$ toma o nome de *topologia vectorial fraca*.

A família de índices é dada por $\mathbf{I} = \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})^*$. Se $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ é uma sub-família finita considere-se $\Omega_\mathbf{J} = \{\varepsilon_j > 0 : j \in \mathbf{J}\}$.

A vizinhança-$\Omega_\mathbf{J}$ associada ao ponto $x_0 \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left[\mathbf{J},\Omega_{\mathbf{J}}\right](x_0) &= \left\{x\in\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) : p_f(x-x_0)<\varepsilon_f;\ f\in\mathbf{J}\right\}\\
&= \left\{x\in\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) : \left|f\left(x-x_0\right)\right|<\varepsilon_{(\xi,f)};\ (\xi,f)\in\mathbf{J}\right\}\\
&= \left\{x\in\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) : \left|\langle f,x-x_0\rangle\right|<\varepsilon_f;\ f\in\mathbf{J}\right\}
\end{aligned}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.vec-fraca*.

É importante não confundir a *topologia vectorial fraca* em $\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)$ com a *topologia fraca de operadores* em $\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)$.

A topologia fraca de $\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)$ é $\sigma(\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right),\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)^*)$.

Definição A.2.8. ***Topologia fraca-$*$ dos operadores***

Para cada $\xi\in\mathbf{E}$ e para cada $f\in\mathbf{F}^*$ considerem-se as aplicações:

$$\begin{aligned}
A_{\xi,f} &: \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)\to\mathbb{C}\\
x &\mapsto A_{\xi,f}(x)=f(x(\xi))
\end{aligned}$$

Para cada $\xi\in\mathbf{E}$, para cada $x\in\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)$ e para cada $f\in\mathbf{F}^*$ considerem-se as semi-normas:

$$p_{\xi,x,f} : x\mapsto\left|f\left(x\left(\xi\right)\right)\right|+\left|f\left(x^*\left(\xi\right)\right)\right|.$$

A topologia gerada por $\left\{p_{\xi,x,f}\right\}_{\xi\in\mathbf{E},x\in\mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}),f\in\mathbf{F}^*}$ toma o nome de *topologia fraca-$*$ dos operadores*.

A família de índices é dada por $\mathbf{I}=\mathbf{E}\times\mathbf{F}^*$. Se $\mathbf{J}\subseteq\mathbf{I}$ é uma sub-família finita considere-se $\Omega_{\mathbf{J}}=\left\{\varepsilon_j>0 : j\in\mathbf{J}\right\}$.

A vizinhança$-\Omega_{\mathbf{J}}$ associada ao ponto $x_0\in\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left[\mathbf{J},\Omega_{\mathbf{J}}\right](x_0) &= \left\{x\in\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) : p_{(\xi,f)}(x-x_0)<\varepsilon_{(\xi,f)};\ (\xi,f)\in\mathbf{J}\right\}\\
&= \left\{x\in\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) : \left|f\left(\left(x-x_0\right)\xi\right)\right|+\left|f\left(\left(x^*-x_0^*\right)\xi\right)\right|<\varepsilon_{(\xi,f)};\ (\xi,f)\in\mathbf{J}\right\}\\
&= \left\{x\in\mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right) : \left|\langle f,\left(x-x_0\right)\xi\rangle\right|+\left|\langle f,\left(x^*-x_0^*\right)\xi\rangle\right|<\varepsilon_{(\xi,f)};\ (\xi,f)\in\mathbf{J}\right\}
\end{aligned}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.fraca-$*$*.

Definição A.2.9. ***Topologia $\sigma-$fraca/ultrafraca dos operadores***

Para cada $\xi\in\mathbf{E}$ e para cada $f\in\mathbf{F}^*$ considerem-se as aplicações:

$$\begin{aligned}
A_{\xi,f} &: \mathbf{L}\left(\mathbf{E},\mathbf{F}\right)\to\mathbb{C}\\
x &\mapsto A_{\xi,f}(x)=f(x(\xi))
\end{aligned}$$

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$, para cada $x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ e para cada $f \in \mathbf{F}^*$ considerem-se as semi-normas:

$$p_{(\xi,x,f)} : x \mapsto |f(x(\xi))|.$$

Construam-se agora as semi-normas que são séries quadráticas convergentes associadas às sucessões de semi-normas do tipo $p_{(\xi_m,x,f_n)}$, $\left(p_{(\xi_m,x,f_n)}\right)_{m,n}$, dadas por

$$p_{[(\xi_m)_m,x,(f_n)]} = \left(\sum_{m,n}\left[p_{(\xi_m,x,f_n)}\right]^2\right)^{1/2}.$$

A topologia gerada por

$$\left\{p_{[(\xi_m)_m,x,(f_n)]} : \sum_{m,n}\left[p_{(\xi_m,x,f_n)}\right]^2 < \infty,\ (\xi_m) \in \mathbf{E}^{\mathbb{N}},\ x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}),\ (f_n) \in (\mathbf{F}^*)^{\mathbb{N}}\right\}$$

é a *topologia $\sigma-$fraca dos operadores*.

A família de índices é dada por

$$\mathbf{I} = \left\{(\xi_m, f_n)_{m,n} \in \mathbf{E}^{\mathbb{N}} \times (\mathbf{F}^*)^{\mathbb{N}} : \sum_{m,n}\left[p_{(\xi_m,x,f_n)}\right]^2 < \infty\right\}.$$

Se $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ é uma sub-família finita considere-se $\Omega_{\mathbf{J}} = \left\{\varepsilon_j > 0 : j \in \mathbf{J}\right\}$.

A vizinhança-$\Omega_{\mathbf{J}}$ associada ao ponto $x_0 \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ é dada por:

$$\mathbf{V}\left[\mathbf{J},\Omega_{\mathbf{J}}\right](x_0) = \left\{x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) : p_{[(\xi_m),x-x_0,(f_n)]} < \varepsilon_{(\xi_m,f_n)};\ (\xi_m, f_n) \in \mathbf{J}\right\}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.$\sigma-$fraca*.

Definição A.2.10. ***Topologia $\sigma-$fraca-$*$/ultrafraca-$*$ dos operadores***

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$ e para cada $f \in \mathbf{F}^*$ considerem-se as aplicações:

$$\begin{array}{rcl} A_{\xi,f} & : & \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto & A_{\xi,f}(x) = f(x(\xi)) \end{array}$$

Para cada $\xi \in \mathbf{E}$, para cada $x \in \mathbf{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ e para cada $f \in \mathbf{F}^*$ considere-se:

$$p_{(\xi,x,f)} : x \mapsto |f(x(\xi))|^2 + |f(x^*(\xi))|^2.$$

e construam-se agora as semi-normas dadas por

$$p_{[(\xi_m)_m,x,(f_n)]} = \left(\sum_{m,n} p_{(\xi_m,x,f_n)}\right)^{1/2}.$$

A topologia gerada por

$$\left\{ p_{[(\xi_m)_m, x, (f_n)_n]} : \sum_{m,n} p_{(\xi_m, x, f_n)} < \infty,\ (\xi_m) \in \mathbf{E}^{\mathbb{N}},\ x \in \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}),\ (f_n) \in (\mathbf{F}^*)^{\mathbb{N}} \right\}$$

é a *topologia $\sigma-$fraca-$*$ dos operadores*.

A família de índices é dada por

$$\mathbf{I} = \{ (\xi_m, f_n)_{m,n} \in \mathbf{E}^{\mathbb{N}} \times (\mathbf{F}^*)^{\mathbb{N}} : \sum_{m,n} p_{(\xi_m, x, f_n)} < \infty \}.$$

Se $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ é uma sub-família finita considere-se $\Omega_{\mathbf{J}} = \left\{ \varepsilon_j > 0 : j \in \mathbf{J} \right\}$.

A vizinhança-$\Omega_{\mathbf{J}}$ associada ao ponto $x_0 \in \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ é dada por:

$$\mathbf{V}\left[\mathbf{J}, \Omega_{\mathbf{J}}\right](x_0) = \left\{ x \in \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) : p_{[(\xi_m), x - x_0, (f_n)]} < \varepsilon_{(\xi_m, f_n)};\ (\xi_m, f_n) \in \mathbf{J} \right\}$$

No que se segue ir-se-á denominar esta topologia por *t.$\sigma-$fraca-$*$*.

A.3 Teoria de Galois Clássica

Referências: [6, 8, 9, 18, 28, 30]

Quando Galois, com o intuito de resolver um grande problema matemático do seu tempo, relaciona uma cadeia de subgrupos do grupo das permutações das raízes de uma equação polinomial com uma cadeia de subcorpos do corpo dos complexos, está muito longe de imaginar o impacto que esta *abordagem* iria ter nas Matemáticas, muito para além do seu problema em particular. Como é que isso seria possível? Já era bastante difícil motivar os seus contemporâneos para as suas ideias - quanto mais imaginar tais repercursões. Matemáticos de incontestável craveira foram incapazes de intuir a importância daquele menino e das suas ideias. Faz-nos pensar, com bastante seriedade, no valor da singularidade da diferença desconhecida.

O tempo acabou por recuperar as ideias soltas do precoce Galois. Hoje já ninguém duvida da importância da Teoria de Grupos e do papel que a mesma tem em todos os domínios da Matemática actual. Testemunham o facto as numerosas publicações sobre o assunto, ano após ano. As aplicações da Teoria dos Grupos são absolutamente transversais: começando nos domínios mais abstractos das matemáticas e indo ao encontro de aplicações concretas: Física, Química, Engenharia, Economia, etc.

O conceito de Grupo, cimentado, entre outros, por Galois, já faz parte integrante do vocabulário corrente da nossa sociedade. Mas Galois não se limitou a edificar o conceito de Grupo. Ele usou-o como um *engenheiro matemático*. Os algebristas dessa altura perderam bastante tempo na identificação das fórmulas resolventes para as equações polinomiais.

A abordagem de Galois foi diferente. Galois não se perdeu na busca pelo algoritmo perfeito. Começa por verificar se valia a pena fazer a viagem. Não vale a pena iniciar uma viagem de muitos dias sem nos aprovisionarmos dos víveres necessários. Podemos morrer à fome antes do fim da viagem. Assim, Galois começou por tratar *aquilo* que nos dias de hoje chamamos *problema de existência*. E fê-lo usando a *Teoria de Grupos*. O que é que fazemos quando queremos *ver* um espectro de radiação que escapa ao visível? Usamos um instrumento que converta o sinal que nós não percebemos em algo cuja percepção seja viável, como o espectro visível. E que escala usar? Uma que seja possível calibrar. Galois decidiu usar uma correspondência entre subgrupos de um grupo e subcorpos de um corpo. A estrutura de grupo é mais simples que a de corpo. Usando propriedades de grupo podemos inferir propriedades de corpo. Hoje já faz parte da cultura geral do Matemático o conhecimento da *Teoria dos Corpos*, que mais não é do que o refinamento desta ideia de Galois.

Tão bela é a Teoria que existe a ideia facilitadora de pensar que nada mais há a acrescentar: usarmos os grupos para estudar uma estrutura riquíssima como os corpos conduz-nos à ratoeira de pensar que fica mais simples estudar aneis de divisão, por exemplo, onde declinamos a propriedade comutativa da segunda operação. A comunidade dos matemáticos ainda teve de percorrer um longo caminho até se encontrar preparada para esta aventura. Curiosamente, o caminho percorrido não foi o do *enfraquecimento* da estrutura e sim o seu *enriquecimento*. Não foi no capítulo da álgebra abstracta que se encontrou a solução. Foi preciso evoluir para a Análise Funcional e para a Álgebra de Operadores. Contudo, até ao momento ainda não foi possível dar uma resposta positiva ao **desafio de Jones**: *desenvolver a teoria de Galois não-comutativa no quadro da álgebra abstracta*.

Definição A.3.1. *Sejam L um corpo e K um subcorpo de L. Então, $L : K$ designa uma* ***extensão de corpos****.*

Teorema A.3.2. *Se $L : K$ define uma extensão de corpos, as operações*

$$\begin{array}{rcl}(\lambda, u) & \mapsto & \lambda u, \text{ com } \lambda \in K \text{ e } u \in L,\\ (u, v) & \mapsto & u + v, \text{ com } u, v \in L,\end{array}$$

definem sobre L a estrutura de espaço vectorial sobre K.

Demonstração. Sendo $(L, \{0, 1, +, \cdot\})$ um corpo vem que $(L, \{0, +\})$ é um grupo abeliano. Como $K \subseteq L$ vem que $\lambda \cdot u \in L$ sempre que $\lambda \in K$ e $u \in L$. Como K é corpo, vem que $(L, \{0, +\} \cup K)$ é espaço vectorial. □

Definição A.3.3. *O* ***índice*** *de uma extensão $L : K$, denotado por $[L : K]$, é a dimensão de L, considerado como espaço vectorial sobre K.*

Definição A.3.4. *Sejam K um subcorpo de um corpo L e $\alpha : L \to L$ um automorfismo. O automorfismo α é um $K-$**automorfismo** se $\alpha(k) = k$ para todo $k \in K$.*

Para todos os efeitos, $K-$*automorfismo* $\equiv$ *automorfismo*$-K$

Teorema A.3.5. *Dada uma extensão de corpos $L : K$ o conjunto de todos os $K-$automorfismos de L constitui um grupo sob a composição de funções.*

Demonstração. Sejam α e β dois automorfismos-K de L. Seja $k \in K$. Temos que $(\alpha \circ \beta)(k) = \alpha(\beta(k)) = \alpha(k) = k$, pelo que $\alpha \circ \beta$ é um automorfismo-K. A identidade em L é claramente um automorfismo-K. Assim, $k = (\alpha^{-1} \circ \alpha)(k) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = \alpha^{-1}(k)$, pelo que α^{-1} é um automorfismo-K. Como a composição de funções é associativa vem que o conjunto de todos os automorfismos-K de L é um grupo. □

Definição A.3.6. *O **grupo de Galois** de uma extensão $L : K$, denotado por $Gal(L : K)$, é o grupo de todos os $K-$automorfismos de L.*

O grupo de Galois $Gal(L : K)$ revela-nos aspectos da estrutura da extensão $L : K$.

Definição A.3.7. *A correspondência biunívoca entre os subgrupos de $Gal(L : K)$ e os subcorpos M tais que $K \subseteq M \subseteq L$, descoberta por Évariste Galois, toma o nome de **correspondência de Galois**.*

Observação A.3.8. *A Definição A.3.6 aplica-se apenas a extensões normais e separáveis. E a correspondência de Galois, tal como é enunciada, também vale somente para extensões de grau finito (normais e separáveis). Dada um extensão $L : K$ e sendo K^* um fecho algébrico de K (contendo L), o número de K-morfismos (algébricos) $L \longrightarrow K^*$ nunca excede o grau $[L : K]$. Quando todos estes morfismos — de facto monomorfismo, porque o núcleo de cada um é ideal próprio de L e logo ideal nulo — são K-automorfismos de L dizemos que a **extensão** $L : K$ é **normal**.*

Exemplo A.3.9. *Seja $\mathbb{Q}$ o corpo dos racionais reais e R a raíz quarta real de um qualquer primo racional. Então a extensão $\mathbb{Q}(R) : \mathbb{Q}$ tem 3 subcorpos mas somente 2 automorfismos. A noção de **separabilidade algébrica** já é assunto que ultrapassa os objectivos deste trabalho.*

Observação A.3.10. *Se K tiver característica 0, i.e., se K possuir uma inifinidade de múltiplos de 1 (e.g. $K = \mathbb{Q}$), então qualquer extensão $L : K$ é separável. Se $L : K$ for uma extensão normal e separável mas de grau infinito ou não tanto, então a correspondência de Galois é preservada entre subcorpos da extensão e subgrupos *fechados* de $Gal(L : K)$, fechados para uma topologia adequada (chamada de Krull, ou, profinita), que torna $Gal(L : K)$ num grupo topológico Hausdorff compacto e completamente desconexo.*

Definição A.3.11. *Seja $L : K$ uma extensão de corpos. Todo o corpo M tal que $K \subseteq M \subseteq L$ toma o nome de **corpo intermédio**.*

Definição A.3.12. *A cada corpo intermédio M de uma extensão de corpos $L : K$ associamos o grupo $M^{\blacktriangle} = Gal(L : M)$, de todos os automorfismos-M de L.*

$K^{\blacktriangle}$ é o subgrupo trivial $Gal(L : K)$ e $L^{\blacktriangle} = \{id : L \to L\}$.

Teorema A.3.13. *Sejam $L : K$ uma extensão de corpos e M e N corpos intermédios. Então $M \subseteq N \Longrightarrow N^{\blacktriangle} \subseteq M^{\blacktriangle}$.*

Demonstração. Seja $M \subseteq N$. Uma aplicação que fixa os elementos de N também fixa os elementos de $M \subseteq N$. □

Definição A.3.14. *A cada subgrupo $H \subseteq Gal(L : K)$, $H \leq Gal(L : K)$, associamos o conjunto $H^{\diamond} = \{x \in L : \alpha(x) = x \text{ para todo o } \alpha \in H\}$, denominado **corpo fixo** de H.*

Teorema A.3.15. *Se $H \leq Gal(L : K)$, então $H^{\diamond}$, corpo fixo de H, é subcorpo de L contendo K.*

Demonstração. Sejam $x, y \in H^\diamond$ e $\alpha \in H$. Então
$\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1,$
$\alpha(x^{-1}) = (\alpha(x))^{-1} = x^{-1},$
$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y) = x + y,$
$\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y) = x \cdot y.$
Assim, $H^\diamond$ é subcorpo de L.
Quando $\alpha \in Gal(L : K)$ vem que $\alpha(k) = k$ para todo o $k \in K$, pelo que $K \subseteq H^\diamond$. □

Teorema A.3.16. *Sejam $G, H \leq Gal(L : K)$. Então $H \subseteq G \Longrightarrow G^\diamond \subseteq H^\diamond$.*

Demonstração. Se um ponto fica fixo por todas as aplicações de G também fica fixo por todas as aplicações de $H \subseteq G$. □

Teorema A.3.17. *Sejam $L : K$ uma extensão de corpos e $Gal(L : K)$ o respectivo grupo de Galois. Se M é um corpo intermédio e $H \leq Gal(L : K)$ então $M \subseteq (M^\blacktriangle)^\diamond$ e $H \subseteq (H^\diamond)^\blacktriangle$.*

Demonstração. Basta considerar que
$M_1 \subseteq M_2 \Longrightarrow M_2^\blacktriangle \subseteq M_1^\blacktriangle$, para corpos intermédios M_1 e M_2
e
$H_1 \subseteq H_2 \Longrightarrow H_2^\diamond \subseteq H_1^\diamond$, para $H_1, H_2 \leq Gal(L : K)$. □

Sejam $L : K$ uma extensão de corpos e $Gal(L : K)$ o respectivo grupo de Galois. Denotemos por **C** o conjunto dos corpos intermédios de $L : K$ e por **G** o conjunto dos subgrupos de $Gal(L : K)$. Assim podemos considerar as aplicações
$^\blacktriangle : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{G}$
e
$^\diamond : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{C}.$

Define-se uma **correspondência de Galois** estabelecendo um *conjunto de condições necessárias para que* $^\blacktriangle$ *e* $^\diamond$ *sejam inversos mútuos*, sendo que **C** *e* **G** *são* **reticulados**.

Bibliografia

[1] O. Bratteli - D. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vol. I, 2002, Springer

[2] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^{eme} série, tome **6** , fasc. 2 (1973), 133-252

[3] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, 1994, Academic Press

[4] J. Dixmier, *von Neumann Algebras*, 1981, North-Holland Mathematical Library

[5] D. Evans - Y. Kawahigashi, *Quantum Symmetries on Operator Algebras*, 1998, Oxford Science Publications

[6] M. Fenrick, *Introduction to the Galois Correspondence*, 2^{nd} edition, 1998, Birkhauser

[7] F. Goodman - P. de la Harpe - V. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of algebras*, 1989, Springer

[8] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, 2^{nd} edition, 1985, Freeman

[9] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, 2^{nd} edition, 1989, Freeman

[10] M. Jammer, *Concepts of Space*, 3^{rd} edition, 1993, Dover

[11] V. Jones, *Index for subfactors*, Inventiones Math. **72** (1983) 1-25

[12] V. Jones, *Subfactors and Knots*, 1991, CBMS, AMS

[13] C. Jordan - D. Jordan, *Groups*, 1994, Edward Arnold - Modular Mathematics Series

[14] V. Jones - V. Sunder, *Introduction to subfactors*, 1997, Cambridge University Press

[15] R. Kadison - J. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, Vol. I, 1983, Academic Press

[16] R. Kadison - J. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, Vol. II, 1986, Academic Press

[17] S. Kawakami - H. Yoshida, *The constituents of Jones' index analysed from the structure of the Galois group*, Math. Japonica **33**, No. 4 (1988), 551-557

[18] S. Lang, *Algebra*, 3^{rd} edition, 1993, Addison-Wesley

[19] M. Nakamura - Z. Takeda, *On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras*, Proc. Japan Acad., **34**, 489-494 (1958)

[20] M. Nakamura - Z. Takeda, *On certain examples of the crossed product of finite factors. I*, Proc. Japan Acad., **34**, 495-499 (1958)

[21] M. Nakamura - Z. Takeda, *On certain examples of the crossed product of finite factors. II*, Proc. Japan Acad., **34**, 500-502 (1958)

[22] M. Nakamura - Z. Takeda, *A Galois Theory for finite factors*, Proc. Japan Acad., **36**, 258-260 (1960)

[23] M. Nakamura - Z. Takeda, *On the fundamental theorems of the Galois theory of finite factors*, Proc. Japan Acad., **36**, 313-318 (1960)

[24] C. Olsen, *Index theory in von Neumann algebras*, 1984, Memoirs of the AMS, Vol. 47, No 294, AMS

[25] P. Pinto, *Subfactores do tipo* $\mathbf{II}_1$ *e teoria das representações de grupos*, 1995, Tese de mestrado, IST

[26] M. Pimsner - S. Popa, *Entropy and Index for subfactors*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **19** (1986), 57-106

[27] M. Reed - B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I, 1980, Academic Press

[28] J. Rotman, *Galois Theory*, 2^{nd} edition, 1998, Springer

[29] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, 1996, GSM, Vol. 10, AMS

[30] I. Stewart, *Galois Theory*, 2^{nd} edition, 1998, Chapman & Hall/CRC

[31] S. Stratila e L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras*, 1979, Abacus Press

[32] V. Sunder, *An invitation to von Neumann algebras*, 1987, Springer

[33] V. Sunder, *Functional Analysis*, 1998, Birkhauser

[34] Reiji Tomatsu, *A Galois correspondence for compact quantum group actions*, Preprint: arXiv:0801.1233v1 [math.OA]

[35] D. Topping, *Lectures on von Neumann algebras*, van Nostrand Reinhold Mathematical Studies 36

[36] T. Turumaru, *Crossed product of operator algebras*, Tôhoku Math. Journ., **10**, 355-365 (1958)

[37] H. Umegaki, *Conditional expectation in an operator algebra*, Tôhoku Math. Journ., **6**, 177-181 (1954)