Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (16/JANEIRO/2009)
LEAmb, LEAN, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ Duração: 3H

Nome do Aluno:____ **Número:**____________
Curso:______________________________ **Turma:**____________________
Advertência: há 6 enunciados parecidos...mas distintos

Teste 3 (1h30m de duração): problemas

A 5	A 6	A 7	A 8	B a)	B b)	B c)	B d)	D b)

GRUPO A (8 valores)
Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v.

---

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema $A_\alpha \mathtt{x} = b_\alpha$ cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 2\alpha \\ 1 & 1 & \alpha+2 & 0 \end{array}\right]$.

   Considere as seguintes afirmações:

   I) Se $(-1,1,0)$ for solução de $A_\alpha \mathtt{x} = b_\alpha$, então $\alpha = -1$.
   II) Existe α tal que o sistema $A_\alpha \mathtt{x} = b_\alpha$ é impossível.
   III) O sistema $A_\alpha \mathtt{x} = b_\alpha$ é possível e determinado se e só se $\alpha \notin \{-1,1\}$.
   IV) $\mathrm{car}(A_\alpha) = 2$ se e só se $\alpha \in \{-1,1\}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, IV ☐ I, II, III ☐ II, III, IV ☐ I, II, III, IV

---

2. Sejam $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $A = S^{-1}DS$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) A não é invertível.
   II) A entrada $(2,2)$ de A^{-8} é igual a 1.
   III) $\det(A) = 1$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ I, II, III

---

3. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e considere a seguinte lista de afirmações:

   I) O núcleo de B tem dimensão igual a 1.
   II) B é diagonalizável em $\mathbb{R}$.
   III) B tem 2 valores próprios distintos.
   IV) $(1,2)$ pertence ao espaço vectorial gerado pelas linhas de B.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II ☐ II, III ☐ III, IV ☐ II, III, IV

---

vire se faz favor

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det(A) = 0$.

   II) $(0, 1, 1, -2)$ é um vector próprio de A.

   III) $\lambda = 0$ é valor próprio de A com multiplicade geométrica igual a 2.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II, ☐ III ☐ I, II, III

5. Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^3$ um vector qualquer de norma 1. Seja ainda θ_1 o ângulo entre u e v_1, θ_2 o ângulo entre u e v_2 e θ_3 o ângulo entre u e v_3. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $||v_1 - v_2|| = \sqrt{2}$.

   II) $\big(\cos(\theta_1)\big)^2 + \big(\cos(\theta_2)\big)^2 + \big(\cos(\theta_3)\big)^2 = 1$.

   III) $v_1 - v_2$ é ortogonal a $3v_2$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ I, II

6. Sejam $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ e $V^\perp$ o complemento ortogonal de V em $\mathbb{R}^3$, usando o produto interno usual. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortonormal de V.

   II) $\dim(V^\perp) = 1$.

   III) $\{(1, 1, 0)\}$ é uma base de $V^\perp$.

   IV) $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortogonal de V.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, IV ☐ I, II, III ☐ II, III, IV ☐ II, III

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T((x, y)) = (x + y, x - y)$ e A a representação matricial de T na base canónica de $\mathbb{R}^2$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   II) T é injectiva.

   III) $T^{-1}((x, y)) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II ☐ II, III ☐ I, III ☐ I, II, III

8. Seja A matriz real $p \times q$ e b matriz real $p \times 1$. Sejam S_1 e S_2 os conjuntos solução dos sistemas $A\mathtt{x} = b$ e $(A^T A)\mathtt{u} = A^T b$, respectivamente. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Se $\hat{u}$ for solução de mínimos quadrados de $(A^T A)\mathtt{u} = A^T b$, então $\hat{u} \in S_2$.

   II) $A^T A$ invertível se e só se A for quadrada.

   III) Se A for quadrada e ortogonal, então temos $S_1 = S_2 = \{A^T b\}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ I, III

GRUPO B (4 valores)

Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual e E o subespaço gerado por v_1 e v_2 onde $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0)$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformações linear definida como se segue:

$$T\big((x,y,z)\big) = \Big(\frac{x-z}{\sqrt{2}},\ y,\ \frac{x+z}{\sqrt{2}}\Big).$$

a) Determine a representação matricial de T na base canónica e verifique se T é bijectiva.
b) Prove que $\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^3$.
c) Determine uma base ortogonal para E e uma base para o complemento ortogonal $E^{\perp}$.
d) Calcule a projecção de $T(v_1)$ no complemento ortogonal de E.

Resolução:

continue no verso desta página

GRUPO C (5 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$ seja $\mathtt{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$.

a) Para cada valor de α, determine o polinómio característico de A_α e os valores próprios de A_α.
b) Encontre os valores de α para os quais A_α é diagonalizável.
c) Para $\alpha = -1$ e escrevendo A em vez de A_α, determine uma base para cada espaço próprio de A.
d) Para $\alpha = -1$, determine uma matriz diagonal D e matriz S^{-1} tais que $D = SAS^{-1}$.
e) Para $\alpha = -1$, resolva o sistema de equações diferenciais $\mathtt{x}'(t) = A\mathtt{x}(t)$ com a condição inicial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 2, 1)$.

Resolução:

continue no verso desta página

GRUPO D (3 valores)

Seja $C^\infty(\mathbb{R})$ o espaço vectorial das funções reais de variável real, infinitamente diferenciáveis, e $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(f) = f'' - 3f'$.

a) Justifique que $\dim(C^\infty(\mathbb{R})) = \infty$.

b) Prove que o núcleo da transformação $Nuc(T)$ é um subespaço vectorial de $C^\infty(\mathbb{R})$ de dimensão finita, determinando uma base para $Nuc(T)$.

Resolução: