Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (17/OUTUBRO/2008)
LEAmb, LEAN, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número:____________________________________**Curso:**_____________________

Advertência: há 6 enunciados parecidos.... mas distintos

Cotação das perguntas de escolha múltipla: **0,6**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,2**v.

---

1. Para cada parâmetro real α sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 3\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathtt{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações:

   I) Se $\mathtt{x}_1$ é solução do sistema $A_\alpha \mathtt{x} = b_\alpha$, então $\alpha \neq 0$.

   II) O sistema $A_\alpha \mathtt{x} = b_\alpha$ é indeterminado para algum α.

   III) A matriz $(A_\alpha)^2$ é invertível e car(A_α)=3 para todo $\alpha \neq 0$.

   IV) A matrix A_α é uma matriz elementar para algum valor de α.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ II, III ☐ I, II, IV ☐ III, IV ☐ II, III, IV

---

2. Sejam A, B matrizes reais 2×2, $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Considere as seguintes afirmações:

   I) Se $\mathtt{x}_1$ é solução de $A\mathtt{x} = b_1$ e de $B\mathtt{x} = b_1$, então $\mathtt{x}_1$ é solução do sistema homogéneo $(A - B)\mathtt{x} = 0$.

   II) Se $\mathtt{x}_1$ é solução de $A\mathtt{x} = b_1$ então $\mathtt{x}_1$ também é solução de $A\mathtt{x} = b_2$.

   III) Existe uma matriz A tal que $\mathtt{x} = 0$ é solução de $A\mathtt{x} = b_1$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ I, II, III

---

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $(BA^{-1})^{-1} =$

   ☐ $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

---

4. Justifique se a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij} = 3i + 2j$ é simétrica.

5. Considere as seguintes matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

   a) Calcule $\det(AA^T)$ e $\det(A^TA)$ e verifique se AA^T ou A^TA é invertível.

   b) Determine o conjunto solução do sistema homogéneo $A\mathtt{x} = 0$.

   c) Determine b tal que $S = \{(1, z, 1) \in \mathbb{R}^3 : \text{com } z \in \mathbb{R}\}$ seja o conjunto solução de $A\mathtt{x} = b$.

6. Se possível dê exemplos de matrizes quadradas A e B com entradas reais tais que $AB = I$ e $BA \neq I$, onde I designa a matriz identidade. Caso não seja possível, justifique porquê.

Resolução: