Indicações para compreender a resolução de um dos enunciados do exame final

(16/JANEIRO/2009)

Cursos: LEAmb, LEAN, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Grupo A

1. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III, IV de per si.

I) Se $(-1,1,0)$ for solução de $A_\alpha \mathrm{x} = b_\alpha$ ter-se-á

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ou seja} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha-1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto $\alpha - 1 = 2\alpha$ o que equivale a $\alpha = -1$.

A afirmação I é pois correcta.

II) O sistema $A_\alpha \mathrm{x} = b_\alpha$ será impossível se e só se a característica da matriz A_α — designado por $\mathrm{car}(A_\alpha)$ — for diferente da característica da matriz aumentada $A_\alpha|b_\alpha$ — designada por $\mathrm{car}(A_\alpha|b_\alpha)$. Ora condensando (i.e. aplicando o método de eliminação de Gauss) à matriz A_α obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

pelo que:

$$\mathrm{car}(A_\alpha) = \begin{cases} 2 \text{ se } \alpha = -1 \\ 2 \text{ se } \alpha = 1 \\ 3 \text{ se } \alpha \neq -1 \text{ e } \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

Por outro lado condensando a matriz $A_\alpha|b_\alpha$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 2\alpha \\ 1 & 1 & \alpha+2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que:

$$\mathrm{car}(A_\alpha|b_\alpha) = \begin{cases} 2 \text{ se } \alpha = -1 \\ 3 \text{ se } \alpha = 1 \\ 3 \text{ se } \alpha \neq -1 \text{ e } \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

Conclui-se que só para $\alpha = 1$ vem $\mathrm{car}(A_\alpha) \neq \mathrm{car}(A_\alpha|b_\alpha)$ e portanto para esse valor de α (e só para esse) o sistema é impossível.

A afirmação II é pois correcta.

III) O sistema será possível se e só se se $\alpha \neq 1$ e nesse caso será determinado — isto é, terá uma solução única — se e só se $\det(A_\alpha) \neq 0$ (por ser A_α uma matriz quadrada); ora como $\det(A_\alpha) = (\alpha-1)(\alpha+1)$ conclui-se que o sistema será possível e determinado se e só se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, ou seja se e só se $\alpha \notin \{-1,1\}$.

A afirmação III é pois correcta.

IV) Do que se viu no início resulta que $\mathrm{car}(A_\alpha) = 2$ se e só se $\alpha = -1$ ou $\alpha = 1$, ou seja se e só se $\alpha \in \{-1,1\}$.

A afirmação IV é pois correcta.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, II, III, IV.

---

2. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) Como $\det(A) = \det(S^{-1}DS) = \det(D) = -1$ conclui-se que $\det(A) \neq 0$ e portanto A é invertível.

A afirmação III é pois <u>incorrecta</u>.

II) Tem-se

$$\begin{aligned} A^{-8} &= (S^{-1}DS)^{-8} = (S^{-1}D^{-1}S)^{8} = \\ &= \overbrace{(S^{-1}D^{-1}S)(S^{-1}D^{-1}S)\ldots(S^{-1}D^{-1}S)}^{8 \text{ factores}} = \\ &= S^{-1}D^{-8}S = S^{-1}D^{8}S = S^{-1}IS = I \end{aligned}$$

em virtude de se ter $D = D^{-1}$ e portanto também $D^2 = I$ e consequentemente $D^8 = I$. Conclui-se que a entrada $(2,2)$ de A^{-8} é 1.

A afirmação II é pois correcta.

III) Tem-se $\det(A) = \det(S^{-1}DS) = \det(D) = -1$

A afirmação III é pois <u>incorrecta</u>.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: II.

---

3. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) O núcleo de B é o conjunto das soluções do sistema linear homogéneo de matriz B e este sistema só tem uma solução — pois $\det(B) = 3 \neq 0$ — que é a solução nula. Quer dizer que a dimensão do núcleo é 0.

A afirmação I é pois <u>incorrecta</u>.

II) A matriz B tem como valores próprios as raízes do polinómio $\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, que são 1 e 3, distintas portanto. Logo a matriz é diagonalizável em $\mathbb{R}$.

A afirmação II é pois correcta.

III) Os valores próprios de B, são 1 e 3, já calculados atrás, e são efectivamente distintos.

A afirmação III é pois correcta.

IV) O espaço vectorial real gerado pelas linhas de B é o conjunto dos vectores da forma $\alpha(1,0) + \beta(2,3)$ com α, β em $\mathbb{R}$. Ora escrevendo

$$(1,2) = \alpha(1,0) + \beta(2,3)$$

viria $1 = \alpha + 2\beta$ e $2 = 3\beta$, ou seja $\alpha = -1/3$ e $\beta = 2/3$; conclui-se que $(1,2)$ pertence ao espaço vectorial gerado pelas linhas de B.

A afirmação IV é pois correcta.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: II, III, IV.

---

4. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, pois este último determinante tem duas linhas iguais.

A afirmação I é pois correcta.

II) Um vector próprio de A é um vector $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $Av = \lambda v$ com algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Ora pondo $v = (0,1,1,-2)$ vem

$$Av = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto $Av = 0v$, pelo que v é um vector próprio associado ao valor próprio 0.

A afirmação II é pois correcta.

III) Já se viu que 0 é um valor próprio de A; a multiplicidade geométrica $\mathrm{mg}(0)$ desse valor próprio 0 é a dimensão do núcleo $\mathrm{Nuc}(A)$ da matriz $A - 0I = A$, que se relaciona com o característica $\mathrm{car}(A)$ de A através $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \mathrm{car}(A) = 4$. Ora condensando a matriz A vem

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $\mathrm{car}(A) = 2$ e portanto $\mathrm{mg}(0) = \dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 4 - \mathrm{car}(A) = 4 - 2 = 2$.

A afirmação III é pois correcta.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, II, III.

---

5. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si. Designaremos o produto interno em jogo por $\langle \ldots, \ldots \rangle$.

I) $\|v_1 - v_2\| = \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle^{1/2}$; ora

$$\begin{aligned}\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle &= \langle v_1 - v_2, v_1 \rangle - \langle v_1 - v_2, v_2 \rangle = \\ &= (\langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_2, v_1 \rangle) - (\langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_2, v_2 \rangle) = \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle - (-\langle v_2, v_2 \rangle) = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle = 2\end{aligned}$$

pelo que $\|v_1 - v_2\| = \sqrt{2}$.

A afirmação I é pois correcta.

II) Para $i = 1, 2, 3$ tem-se $\cos\theta_i = \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|u\|\|v_i\|}$ mas como a base $\{v_1, v_2, v_3\}$ é ortonormada e como $\|u\| = 1$, tem-se $\cos\theta_i = \langle u, v_i \rangle$. Ora:

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_1 \rangle v_2 + \langle u, v_1 \rangle v_3$$

e como $\|u\| = 1$ tem-se

$$\|u\| = \langle u, v_1 \rangle^2 + \langle u, v_2 \rangle^2 + \langle u, v_3 \rangle^2 = (\cos\theta_1)^2 + (\cos\theta_2)^2 + (\cos\theta_3)^2 \ .$$

A afirmação II é pois correcta.

III) Como v_1, v_2 e v_3 são ortogonais tem-se

$$\langle v_1 - v_2, 3v_2 \rangle = \langle v_1, 3v_2 \rangle + \langle -v_2, 3v_2 \rangle = 3\langle v_1, v_2 \rangle - 3\langle v_2, v_2 \rangle = 3.0 - 3.1 = -3$$

e portanto $v_1 - v_2$ não é ortogonal a $3v_2$.

A afirmação III é pois <u>incorrecta</u>.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, II.

---

6. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III, IV de per si.

I) Tem-se que $||(-1, 1, 0)|| = \sqrt{2}$ pelo que o vector $(-1, 1, 0)$ não tem norma igual a 1.

A afirmação I é pois <u>incorrecta</u>.

II) Tem-se $\dim V = 2$ pelo que $\dim V^\perp = 1$ (pois $\dim V + \dim V^\perp = 3$) e uma base de $V^\perp$ só pode ter um elemento.

A afirmação II é pois correcta.

III) Tem-se como se disse $\dim V^\perp = 1$ e uma base de $V^\perp$ compõe-se de um qualquer elemento não nulo de $V^\perp$; ora o vector $(1, 1, 0)$ é ortogonal a qualquer vector de V, pois considerando uma base para V, por exemplo $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ tem-se $\langle (1, 1, 0), (1, -1, 0) \rangle = 0$ e $\langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0$; quer dizer: o vector $(1, 1, 0)$ pertence a $V^\perp$ e é não nulo, logo constitui-se numa base de $V^\perp$.

A afirmação III é pois correcta.

IV) Pondo $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$ já se disse — na questão anterior — que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V e que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, pelo que $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de V.

A afirmação IV é pois correcta.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: II, III, IV.

---

7. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) A matriz que representa T com relação à base canónica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A afirmação I é pois <u>incorrecta</u>.

II) Como $\det(A) = 2 \neq 0$, T é bijectiva e portanto injectiva.

A afirmação II é pois correcta.

III) Como $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tem-se (com relação à base canónica):

$$\begin{aligned}T^{-1}(x, y) &\equiv A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2}(x + y, x - y) = (\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}) \ .\end{aligned}$$

A afirmação III é pois correcta.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: II, III.

---

8. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) Se $\hat{u}$ for solução de mínimos quadrados de $A^TAu = A^Tb$, então, por definição, $\hat{u}$ é solução do sistema $(A^TAA^TA)\hat{u} = (A^TAA^T)b$. Mas então $\hat{u}$ também é soluçõ de $A^TAu = A^Tb$, uma vez que este sistema é possível (dado que as soluções deste sistema são os mínimos quadrados do sistema $Ax = b$). Conclusão: $\hat{u} \in S_2$

A afirmação I é pois correcta.

II) A matriz $A = [0]$ é quadrada $A^TA = [0][0] = [0]$ não é invertível.

A afirmação II é pois <u>incorrecta</u>.

III) Se A for quadrada e ortogonal ter-se-á $A^TA = I$ e o sistema $A^TA\mathrm{u} = A^Tb$ reduz-se a $\mathrm{u} = A^Tb$ ou seja $S_2 = \{A^Tb\}$; como se sabe que $S_1 \subset S_2$ verifiquemos se se tem $S_1 \supset S_2$ ou seja se A^Tb é solução de $A\mathrm{x} = b$; ora com a hipótese de se ter $A^TA = I$ virá $A(A^Tb) = (A^TA)b = Ib = b$ pelo que $A^Tb \in S_1$ e portanto $S_1 \supset S_2$ e em conclusão virá $S_1 = S_2$.

A afirmação III é pois correcta.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, III.

Grupo B

a) Tem-se

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ T(0,1,0) &= (0,1,0) \\ T(0,0,1) &= (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

pelo que a matriz pedida será

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e como

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1$$

conclui-se que T é bijectiva.

b) A matriz A é ortogonal — isto é, $AA^t = A^tA = I$ — pelo que pondo $T(u) \equiv Au$ e atendendo a que $\langle u, v\rangle = u^tv$ tem-se necessariamente

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v)\rangle &= \langle Au, Av\rangle = (Au)^t(Av) = (u^tA^t)(Av) = u^tA^tAv = \\ &= u^tIv = u^tv = \langle u, v\rangle \ . \end{aligned}$$

c) Partindo de $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,1,0)$ vamos obter dois vectores ortogonais w_1, w_2, constituindo uma base ortogonal de E:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \mathrm{proj}_{v_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = v_2 - \frac{1}{1} v_1 = \\ &= v_2 - v_1 = (1,1,0) - (1,0,0) = (0,1,0) \ . \end{aligned}$$

Para obter uma base ortogonal de $E^\perp$ basta observar que se tem a igualdade $\dim E^\perp = 3 - \dim E = 3 - 2 = 1$ e obter um vector não nulo de $E^\perp$; ora o vector $w = (0,0,1)$ é obviamente ortogonal aos vectores da base $\{w_1, w_2\}$ de E, pelo que $\{w\}$ é uma base de $E^\perp$.

d) A projecção de $T(v_1)$ sobre $E^\perp$ é igual a: $\mathrm{proj}_w(T(v_1))$ onde $\{w\}$ é uma base de $E^\perp$ – por exemplo a determinada anteriormente one $w = (0,0,1)$.

Ora $T(v_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, pelo que

$$\mathrm{proj}_w(T(v_1)) = \frac{\langle T(v_1), w\rangle}{\langle w, w\rangle} w =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}(0,0,1) = (0,0\frac{1}{\sqrt{2}}) = (0,0\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Grupo C

a) O polinómio característico de A_α é dado por

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(\mathrm{x}) &= \det(A_\alpha - \mathrm{x}I) = \begin{vmatrix} -\mathrm{x} & 1 & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{x} & 0 \\ 1 & \alpha & 1-\mathrm{x} \end{vmatrix} = \\ &= (1-\mathrm{x})\begin{vmatrix} -\mathrm{x} & 0 \\ 1 & 1-\mathrm{x} \end{vmatrix} = (1-\mathrm{x})^2(-\mathrm{x}) = \\ &= -(1-\mathrm{x})^2\mathrm{x} = -(1-2\mathrm{x}+\mathrm{x}^2)\mathrm{x} = -(\mathrm{x}-2\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3) = \\ &= -\mathrm{x}+2\mathrm{x}^2-\mathrm{x}^3 \end{aligned}$$

e as raízes de $p_{A_\alpha}(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}+2\mathrm{x}^2-\mathrm{x}^3 = -(1-\mathrm{x})^2\mathrm{x}$ são 0 e 1 (independentes portanto de α).

b) Calculemos as multiplicidades geométricas de cada um dos valores próprios, 0 e 1 de multiplicidades algébricas, respectivamente $\mathrm{ma}(0) = 1$ e $\mathrm{ma}(1) = 2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{mg}(0) &= \dim(\mathrm{Nuc}(A_\alpha - 0I)) = \dim(\mathrm{Nuc}(A_\alpha)) = 3 - \mathrm{car}(A_\alpha) \\ \mathrm{mg}(1) &= \dim(\mathrm{Nuc}(A_\alpha - 1I)) = \dim(\mathrm{Nuc}(A_\alpha - I)) = 3 - \mathrm{car}(A_\alpha - I) \end{aligned}$$

e calculando os rangos indicados através da condensação das matrizes A_α e $A_\alpha - I$ vem:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $\mathrm{car}(A_\alpha) = 2$ e portanto $\mathrm{mg}(0) = 3 - 2 = 1 = \mathrm{ma}(0)$; e por outro lado,

$$A_\alpha - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\mathrm{car}(A_\alpha - I) = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha \neq -1 \\ 1 & \text{se } \alpha = -1 \end{cases}$$

e portanto

$$\mathrm{mg}(1) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \neq -1 \\ 2 & \text{se } \alpha = -1 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \mathrm{mg}(1) &\neq \mathrm{ma}(1) \quad \text{se } \alpha \neq -1 \\ \mathrm{mg}(1) &= \mathrm{ma}(1) \quad \text{se } \alpha = -1 \end{aligned}$$

e conclui-se que a matriz A_α só é diagonalizável se for $\alpha = -1$.

c) Pondo $A_\alpha \equiv A$, os espaços próprios relativos a 0 e a 1 são respectivamente:

$$\begin{aligned} E(0) &= \mathrm{Nuc}(A - 0I)) = \mathrm{Nuc}(A) \\ E(1) &= \mathrm{Nuc}(A - 1I) = \mathrm{Nuc}(A - I) \end{aligned}$$

e resolvendo os sistemas homogéneos de matrizes A e $A - I$ (onde se fez $\alpha = -1$) teremos $\{(-1,0,1)\}$ é uma base de $E(0)$ e $\{(0,0,1),(1,1,0)\}$ é uma base de $E(1)$.

d) Pondo $A_\alpha \equiv A$, matrizes D e S^{-1} tais que $D = SAS^{-1}$ podem ser obtidas do modo seguinte.

A matriz diagonal D pode ser

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

matriz diagonal em que, na diagonal, figura uma vez o valor próprio 0 (de multiplicidade 1) e duas vezes o valor próprio 1 (de multiplicidade 2). A matriz S^{-1} pode ser

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja primeira coluna corresponde a um vector próprio de 0 e cujas segunda e terceira colunas correspondem a dois vectores próprios de 1.

e) O conjunto solução do sistema $x'(t) = Ax(t)$ é obtido, usando a matriz cujas colunas são os valores próprios e exponencial da cada valor próprio, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} c_1 e^{0t} \\ c_2 e^{1t} \\ c_3 e^{1t} \end{bmatrix} = \ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 + c_3 e^t \\ c_3 e^t \\ c_1 + c_2 e^t \end{bmatrix} ,$$

ou seja $(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)) = (-c_1 + c_3 e^t,\ c_3 e^t,\ c_1 + c_2 e^t)$, onde c_1, c_2, c_3 são constantes reais.

Como $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 2, 1)$ terá de ser

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-c_1 + c_3,\ c_3,\ c_1 + c_2) = (1, 2, 1)$$

o que conduz a $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$ e daí

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (-1 + e^t\ ,\ 2e^t\ ,\ 1)\ .$$

Grupo D

a) Basta observar que as funções polinomiais f_n da forma

$$f_n(x) = x^n$$

conduzem a um conjunto

$$\{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$$

de vectores que são linearmente independentes e não em número finito.

b) O núcleo de qualquer aplicação linear — e em particular o núcleo de T — é um subespaço vectorial do espaço vectorial de partida.

O núcleo de T compõe-se das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ que satisfazem a relação $f'' - 3f' = 0$; pondo $f' = g$ terá de verificar-se portanto $g' - 3g = 0$ ou seja g terá de ser da forma $g(x) = \alpha \exp(3x)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e portanto f terá de verificar $f'(x) = \alpha \exp(3x)$ ou seja $f(x)$ terá de ser da forma $f(x) = \beta + \alpha(\frac{1}{3}\exp(3x)) = \beta + \frac{\alpha}{3}\exp(3x)$ com α e β em $\mathbb{R}$; quer dizer que o núcleo de T é um espaço de dimensão 2 e as funções $e_1(x) = 1$ $e_2(x) = \exp(3x)$ configuram uma possível base desse espaço.