Indicações para <u>compreender</u> a resolução de um dos enunciados do exame final

(30/JANEIRO/2009)

Cursos: LEAmb, LEAN, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Grupo A

1. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.
Ora condensando (i.e. aplicando o método de eliminação de Gauss) a matriz $A_\alpha|b$ tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1-\alpha & 2-2\alpha \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 2(1-\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

I) Portanto car(A)=2 para $\alpha = 1$
A afirmação I é pois correcta.

II) Se $(-1, 0, 1)$ for solução do sistema $A_\alpha \mathrm{x} = 0$ ter-se-á:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja $\alpha = 1$.
A afirmação II é pois correcta.

III) Para $\alpha \neq 1$ o sistema $A_\alpha \mathrm{x} = b$ é possível e determinado.
A afirmação III é pois <u>incorrecta</u>.
Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, II.

---

2. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.
I) $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$ será invertível se e só se $\det(A_\alpha) \neq 0$; ora $\det(A_\alpha) = \alpha(1-\alpha)$ pelo que A_α será invertível se e só se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.
A afirmação I é pois correcta.

II) Como a A_α é uma matriz 2×2 e $\det(A_\alpha^T) = \det(A_\alpha))$, temos $\det(2A_\alpha^T) = 2^2 \det(A_\alpha)$

A afirmação II é pois correcta.

III) Para que se tenha

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

é necessário que A_α seja invertível e que portanto se tenha $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$. Nesse caso, como

$$A_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

a igualdade (*) significa

$$\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

o que equivale a dizer que

$$\alpha = -1 \quad \text{e} \quad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

ou ainda, enfim, a dizer que

$$\alpha = -1 \quad \text{e} \quad (\alpha = 2 \text{ ou } \alpha = -1)$$

ou seja, em definitivo, equivale a dizer que

$$\alpha = -1\ .$$

A afirmação III é pois correcta.
Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, II, III.

---

3. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) Dizer que os vectores v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes significa dizer que dados números reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tais que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathsf{0}$$

então $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ora isto significa que o sistema homogéneo $Ax = 0$ é determinado, donde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tem que ser invertível, isto é $\det(A) \neq 0$. Usando a Regra de Laplace, temos:

$$\det(A) = \alpha \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \alpha \det \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\alpha(2+1) - \alpha(2\alpha + \alpha) + 1(0) = 3\alpha(1-\alpha).$$

Portanto, v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes para $\alpha \notin \{0, 1\}$.

A afirmação I é pois correcta.

II) Para $\alpha = 0$ tem-se $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 0, 0)$, $v_3 = (1, -1, 2)$ e portanto os vectores de E, são os vectores da forma

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_3 v_3 \ .$$

Tais vectores $v = (x, y, z)$ que vão pertencer a E são os que tornam o sistema linear cuja matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \end{array}\right],$$

possível. Ora condensando, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 3 & z-y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & z-y-3x \end{array}\right].$$

Portanto $(x, y, z) \in E$ se $z - y - 3x = 0$.

A afirmação II é pois correcta.

III) Para $\alpha = 1$, vem que $v_1 = v_2$, pelo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ são linearmente dependentes, pelo que não podem constutuir uma base.

A afirmação III é pois <u>incorrecta</u>.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, II.

---

4. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) A matriz A^n é uma matriz de tipo 3×3 pelo que nunca pode ser $\mathrm{car}(A^n) > 3$ e em particular $\mathrm{car}(A^3)$ não pode ser igual a $1 + 3 = 4$.

A afirmação I é pois <u>incorrecta</u>.

II) Dizer que $\lambda = 0$ é um valor próprio de A é dizer que a equação $A\mathrm{x} = 0\mathrm{x}$, ou seja $A\mathrm{x} = 0$, tem soluções não triviais. Ora só será esse o caso se $\det(A) = 0$; e tem-se

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

por haver uma linha de zeros.

A multiplicidade geométrica de 0 é a dimensão do espaço das soluções do sistema $A\mathrm{x} = 0$.

Ora resolvendo o sistema obtém-se através de uma condensação,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja as soluções do sistema são os ternos (x, y, z) tais que $x + y = 0$ e $z = 0$, ou seja os elementos $(x, -x, 0)$ pelo que a multiplicidade geométrica de 0 é igual a 1.

A afirmação II é pois correcta.

III) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda(\lambda^2-2\lambda) = -\lambda^2(\lambda-2) \end{aligned}$$

pelo que 0 é valor próprio de multiplicidade algébrica 2, diferente portanto da multiplicidade geométrica (que é 1) pelo que a diagonalização em $\mathbb{R}$ não é possível.

A afirmação III é pois <u>incorrecta</u>.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: II.

---

5. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) $u \in Nuc(A_\alpha)$ se $A_\alpha u = 0$. Ora:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha \\ \alpha+1 \end{bmatrix},$$

pelo que temos que ter $\alpha+1=0$. Portanto $u \in Nuc(A_\alpha)$ para $\alpha=-1$.

A afirmação I é pois correcta.

II) Dizer que u é vector próprio de A_α é dizer que $u \neq 0$ e que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A_\alpha u = \lambda u$. Ora

$$A_\alpha u = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha \\ \alpha+1 \end{bmatrix}$$

e portanto dizer que $A_\alpha u = \lambda u$ é dizer que $1+\alpha=\lambda$ ou seja para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A_\alpha u = \lambda u$ bastando tomar $\lambda = 1+\alpha$.

A afirmação II é pois correcta.

III) É claro que para $\alpha=1$, temos $u \in C_\alpha$.

A afirmação III é pois correcta.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, II, III.

---

6. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) Dizer que $(1,1,2) \in V$ é dizer que $1-1=0$ e $1+4=0$, o que é falso.

A afirmação I é pois <u>incorrecta</u>.

II) O espaço V compõe-se dos elementos da forma $(-2z,-2z,z)$ com $z \in \mathbb{R}$, ou seja é gerado por $(-2,-2,1)$; o espaço $V^\perp$ compõe-se dos elementos (x,y,z) tais que — designando por $\langle \ldots, \ldots \rangle$ o produto interno usual — se tenha $\langle (x,y,z),(-2,-2,1)\rangle = -2x-2y+z=0$ o que não equivale a $2x+2y-z=0$.

A afirmação II é pois correcta.

III) Tem-se $V \cap V^\perp = \{0\}$ pelo que $V+V^\perp = \mathbb{R}^3$, ou seja $\dim(V+V^\perp)=3$.

A afirmação III é pois <u>incorrecta</u>.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: II.

---

7. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) A matriz A que representa T com relação à base ordenada $(1,\mathrm{x},\mathrm{x}^2)$ calcula-se a partir de

$$\begin{aligned} T(1) &= 2 = 2.1+0.\mathrm{x}+0.\mathrm{x}^2 \\ T(x) &= 0.1+2.\mathrm{x}+0.\mathrm{x}^2 \\ T(x^2) &= 2\mathrm{x}+2\mathrm{x}^2 = 0.1+2.\mathrm{x}+2.\mathrm{x}^2 \end{aligned}$$

e conduz a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A afirmação I é pois correcta.

II) Uma vez que $T(3+4\mathrm{x}) = 2(3+4\mathrm{x}) + \mathrm{x}(3+4\mathrm{x})'' = 6+8\mathrm{x}$, concluimos que $T(3+4\mathrm{x}) \neq 0$. Portanto $3+4\mathrm{x}$ não pertence ao núcleo de T.

A afirmação II é pois <u>incorrecta</u>.

III) Dizer que $p(\mathrm{x}) = 3 + 4\mathrm{x}$ é vector próprio de T é dizer que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T(p(\mathrm{x})) = \lambda\, p(\mathrm{x})$ ou ainda em versão matricial,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ou seja} \qquad \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e basta tomar $\lambda = 2$.

A afirmação III é pois correcta.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: I, III.

---

8. Vamos examinar cada uma das questões I, II, III de per si.

I) Se $\lambda = 3$ for um valor próprio de A tem de verificar-se $\det(A - 3I) = 0$ pelo que $A - 3I$ não pode ser invertível.

A afirmação I é pois <u>incorrecta</u>.

II) Se $x(t)$ for solução de $x'(t) = A\, x(t)$ virá:

$$3e^{3t}u = A(e^{3t}u)$$

ou seja

$3e^{3t}u = e^{3t}A(u)$ ou $3e^{3t}u = e^{3t}3u$ o que é verdade.

A afirmação II é pois correcta.

III) Vamos verificar se o vector $v = 3u$ satisfaz $Av = 3v$. Ora, sabemos que $Au = 3u$, pelo que

$$A(v) = A(3u) = 3(Au) = 3(3u) = 3v,$$

pelo que $3u$ é de facto vector próprio de A associado ao valor próprios $\lambda = 3$.

A afirmação III é pois <u>correcta</u>.

Conclui-se que a lista completa de afirmações correctas é: II, III.

Grupo B

a) u (que é não nulo) será vector próprio de A se existir $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Au = \lambda u$; ora tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pelo que u é um vector próprio de A associado ao valor próprio 3.

b) O conjunto dos valores próprios de A é constituído pelas raízes do polinómio (em λ) $\det(A - \lambda I)$. Ora

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \lambda & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda) - \lambda(-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda) = \\
&= -\lambda^2(\lambda - 3)
\end{aligned}$$

pelo que o conjunto das raízes do polinómio é $\{0, 3\}$.

c) A matriz A será diagonalizável se e só se as multiplicidades algébricas — $\mathrm{m}_a(0)$ e $\mathrm{m}_a(3)$ — e geométricas — $\mathrm{m}_g(0)$ e $\mathrm{m}_g(3)$ — de ambos os valores próprios forem iguais. Ora

$$\mathrm{m}_a(0) = 2 \;\; , \;\; \mathrm{m}_a(3) = 1$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}_g(0) &= \dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 3 - \mathrm{car}(A) \\
\mathrm{m}_g(3) &= \dim(\mathrm{Nuc}(A - 3I)) = 3 - \mathrm{car}(A - 3I)
\end{aligned}$$

e condensando as matrizes A e $A-3I$ determina-se facilmente as suas características,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}A-3I&=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\0&3&-3\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&3&-3\end{bmatrix}\rightsquigarrow\\&\rightsquigarrow\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

tendo-se portanto

$$\mathrm{m}_g(0)=3-\mathrm{car}(A)=3-1=2\quad,\quad\mathrm{m}_g(3)=3-\mathrm{car}(A-3I)=3-2=1$$

pelo que

$$\mathrm{m}_a(0)=\mathrm{m}_g(0)\quad\text{e}\quad\mathrm{m}_a(3)=\mathrm{m}_g(3)$$

e a matriz A é diagonalizável; mais precisamente é diagonalizável em $\mathbb{R}$, pois o conjunto dos seus valores próprio s está contido em $\mathbb{R}$.

Como matriz diagonal pode tomar-se a matriz

$$D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

e as colunas da matriz S^{-1} são os vectores de bases dos espaços próprios de: $\lambda=0$ (na primeira e segunda clunas) e de $\lambda=3$ na terceira coluna. (isto é S^{-1} é matriz mudança de base da base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios para a base canónica). Como

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

vem para $\mathrm{Nuc}(A)$ o conjunto

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y+z=0\right\}$$

ou seja é o conjunto dos ternos da forma $(x,y,-x-y)$ e portanto uma base é por exemplo constituída pelos vectores

$$(1,0,-1)\ \text{ e }\ (0,1,-1)\,.$$

Como

$$\begin{aligned}A-3I&=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}-2&2&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\\&\rightsquigarrow\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

vem para $\mathrm{Nuc}(A-3I)$ o conjunto

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ -x+y=0\ \text{ e }\ -y+z=0\right\}$$

ou seja é o conjunto dos ternos da forma (y,y,y) e portanto uma base é por exemplo constituída pelo vector

$$(1,1,1)\,.$$

Tem-se pois

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}.$$

d) O sistema $\mathrm{x}'(t) = A\,\mathrm{x}(t)$ reescreve-se pondo

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \qquad \text{na forma} \qquad \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Pelo que as soluções de $\mathtt{x}'(t) = A\mathtt{x}(t)$ ão obtidas como se segue:

$$\mathrm{x}(t) = S^{-1} \begin{bmatrix} k_1 \exp(0t) \\ k_2 \exp(0t) \\ k_3 \exp(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \exp(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 \exp(3t) \\ k_2 + k_3 \exp(3t) \\ -k_1 - k_2 + k_3 \exp(3t) \end{bmatrix}$$

onde k_1, k_2, k_3 pertencem a $\mathbb{R}$.

e) A solução

$$x(t) = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 \exp(3t) \\ k_2 + k_3 \exp(3t) \\ -k_1 - k_2 + k_3 \exp(3t) \end{bmatrix}$$

será constante se $k_3 = 0$. E se ela for tal que

$$x(0) = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 \\ k_2 + k_3 \\ -k_1 - k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ter-se-á

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = a \\ k_2 + k_3 = b \\ -k_1 - k_2 + k_3 = c \end{cases}$$

e resolvendo o sistema vem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -1 & -1 & 1 & c \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 2 & a+c \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & a+b+c \end{array}\right]$$

e em particular vem

$$3\,k_3 = a + b + c$$

e dizer que $k_3 = 0$ — ou seja dizer que $x(t)$ é constante — é realmente equivalente a dizer que $a + b + c = 0$.

Grupo C

a) Como através de condensação se obtém (colucando os vectores $v_1,\ v_2, v_3$ em linha na seguinte matriz)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta que $\{v_1, v_2\}$ é uma base.

b) Há que ortogonalizar o conjunto de vectores $\{v_1, v_2\}$.

Para tal considera-se os vectores w_1, w_2 dados por:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \mathrm{pr}_{w_1} v_2 \,. \end{aligned}$$

Ora

$$\mathrm{pr}_{w_1} v_2 = \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \frac{\langle (1,1,1), (3,2,1) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle} (1,1,1) = \frac{6}{3}(1,1,1) = (2,2,2)$$

pelo que

$$w_2 = v_2 - \mathrm{pr}_{v_1} v_2 = (3,2,1) - (2,2,2) = (1,0,-1)$$

e portanto uma base ortogonal para o espaço V é: $\{w_1, w_2\}$ onde $w_1 = (1,1,1)$ e $w_2 = (1,0,-1)$.

Vamos calcular a projecção de $v = (1,-2,1)$ sobre V, designada por $P_V(v)$, usando a base ortogonal de V determinada em a):

$$P_V(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \frac{0}{3} w_1 + \frac{0}{2} w_2 = (0,0,0).$$

c) Trata-se de de determinar uma base de $\mathrm{im}(T)$; como

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0,0) \\ T(0,1,0) &= (1,0,2) \\ T(0,0,1) &= (1,0,0) \end{aligned}$$

basta determinar uma base para o espçao gerado por $(1,0,0)$ e $(1,0,2)$ e essa base é precisamente $\{(1,0,0),(1,0,2)\}$; como $\dim(\mathrm{im}(T)) = 2$ é claro que T não é sobrejectiva.

d) Há que determinar a dimensão do espaço $T(V)$ e como $\{(1,1,1),(3,2,1)\}$ é uma base de V basta determinar a dimensão do espaço gerado por

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (3,0,2) \\ T(3,2,1) &= (6,0,4) = 2(3,0,2) \end{aligned}$$

que é obviamente igual a 1.

Grupo D

a) Ponha-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & a & b \\ c & d & e \end{bmatrix}$; a condição $A^2 = \mathbf{0}$ significa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & a & b \\ c & d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & a & b \\ c & d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+1 & d & e+1 \\ bc-a-1 & a^2+bd & be+ab-1 \\ c-d+ce & de+ad & c+bd+e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde se deduz imediatamente que:

$$d = 0,\ c = -1,\ e = -1$$

e consequentemente, com esses valores vem,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b-a-1 & a^2 & -b+ab-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que implica $a = 0$ ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b-1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto $b = -1$.

Quer dizer:

$$a = 0, b = -1, c = -1, d = 0, e = -1$$

e portanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) A característica $\mathrm{car}(A)$ de uma matriz A de tipo 3×3 é um dos números $0, 1, 2, 3$.

Se $A \neq \mathbf{0}$ for a matriz nula ter-se-á $\mathrm{car}(A) \neq 0$ e é claro que $A^2 = \mathbf{0}$.

Se $A^2 = \mathbf{0}$ não pode ter-se $\mathrm{car}(A) = 3$, pois então viria $\det(A) \neq 0$ e da relação $A^2 = \mathbf{0}$ resultaria $\det(A)^2 = 0$ o que é impossível.

Só pode ser portanto $\mathrm{car}(A) = 1$ ou $\mathrm{car}(A) = 2$.

Também sabemos que em geral temos

$$\mathrm{car}(A) + \dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 3 \qquad (*).$$

Por outro lado, para qualquer vector u temos $A(Au) = 0$, usando a hipótese. Pelo que sabendo que $Au \in C_A$ concluimos que

$$C_A \subset \mathrm{Nuc}(A) \qquad (**).$$

Ora $\dim(C_A)$=$\mathrm{car}(A)$, por (**) concluimos que $\mathrm{car}(A) \leq \mathrm{Nuc}(A)$. Portanto $\mathrm{car}(A) = 1$.