Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (30/JANEIRO/2009)
LEAmb, LEAN, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Duração: 3H

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:____________________________ **Turma:**_________________
Advertência: há 6 enunciados parecidos...mas distintos

GRUPO A (8 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v.

---

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema linear $A_\alpha \mathtt{x} = b$ cuja matriz aumentada é: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right]$.

   Considere as seguintes afirmações:

   I) A característica de A_α é igual a 2 para algum valor de α.
   II) Se $(-1, 0, 1)$ for solução do sistema homogéneo $A_\alpha \mathtt{x} = 0$, então $\alpha = 1$.
   III) O sistema $A_\alpha \mathtt{x} = b$ é possível e indeterminado para qualquer valor de α.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ I, II

---

2. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) A_α é invertível para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.
   II) $\det(2A_\alpha^T) = 4\det(A_\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
   III) Se $A_\alpha^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, então $\alpha = -1$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II ☐ II, III ☐ I, III ☐ I, II, III

---

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ sejam $v_1 = (\alpha, 1, 1), v_2 = (\alpha, \alpha, \alpha), v_3 = (1, -1, 2)$ e seja E o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1, v_2 e v_3. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes para algum α.
   II) Para $\alpha = 0$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x + y - z = 0\}$.
   III) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ para $\alpha = 1$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II ☐ II, III ☐ I, III ☐ I, II, III

---

vire se faz favor

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\mathrm{car}(A^n) = 1 + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   II) $\lambda = 0$ é valor próprio de A com multiplicidade geométrica igual 1.

   III) A é diagonalizável em $\mathbb{R}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ I, II, III

---

5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Existe α tal que $u \in \mathrm{Nuc}(A_\alpha)$.

   II) Existe α tal que u é vector próprio de A_α.

   III) Existe α tal que $u \in C_{A_\alpha}$, onde C_{A_α} designa o espaço gerado pelos vectors colunas de A_α.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II ☐ I, III ☐ II, III ☐ I, II, III

---

6. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - y = 0, \; x + 2z = 0\}$ subespaço de $\mathbb{R}^3$, munido com o produto interno usual. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $(1, 1, 2) \in V$.

   II) $V^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - z = 0\}$.

   III) $\dim(V + V^\perp) = 2$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ I, III

---

7. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios de grau inferior ou igual a 2 (incluindo o polinómio nulo) com coeficientes reais. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = 2p(x) + xp''(x)$. Considere a lista de afirmações:

   I) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é a representação matricial de T na base canónica.

   II) $3 + 4x \in \mathrm{Nuc}(T)$.

   III) $3 + 4x$ é vector próprio de T.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ I, III

---

8. Seja A matriz quadrada e real e seja u um vector próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 3$. Considere as seguintes afirmações:

   I) A matriz $A - 3I$ é invertível.

   II) A função $\mathtt{x}(t) = e^{3t}u$ é uma solução do sistema de equações diferenciais $\mathtt{x}'(t) = A\mathtt{x}(t)$.

   III) $3u$ é vector próprio de A, cujo valor próprio associado é $\lambda = 3$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ II, III

GRUPO B (5 valores)

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, seja $\mathtt{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$.

a) Verifique que u é vector próprio de A, indicando o valor próprio associado.

b) Prove que $\{0, 3\}$ é o conjunto dos valores próprios de A.

c) Justifique que A é diagonalizável em $\mathbb{R}$, construindo uma matriz diagonal D e uma matriz S^{-1} tais que $D = SAS^{-1}$.

d) Determine o conjunto das soluções do sistema de equações diferenciais $\mathtt{x}'(t) = A\mathtt{x}(t)$.

e) Seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $\mathtt{x}(t)$ a solução do sistema $\mathtt{x}'(t) = A\mathtt{x}(t)$ sujeito às condições iniciais $(x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)) = (a, b, c)$. Verifique que $\mathtt{x}(t)$ é constante, em t, se $a + b + c = 0$.

Resolução:

continue no verso desta página

GRUPO C (4 valores)

Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual e V o subespaço gerado por $v_1 = (1,1,1), v_2 = (3,2,1)$ e $v_3 = (2,1,0)$. Seja ainda $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T\big((x,y,z)\big) = (x+y+z, 0, 2y).$$

a) Determine uma base para V.
b) Determine uma base ortogonal para V e calcule a projecção de $(1,-2,1)$ sobre V.
c) Verifique que T transforma V numa recta (isto é, a dimensão do subespaço gerado por $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ é igual a 1).

Resolução:

continue no verso desta página

GRUPO D (3 valores)

a) Complete a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$ por forma a obter $A^2 = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ designa a matriz nula.

b) Seja B matriz real 3×3 qualquer, não nula, tal que $B^2 = \mathbf{0}$. Prove que $\mathrm{car}(B) = 1$.

Resolução: