Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

(04/DEZEMBRO/2007)
Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número:____**Curso:**______________________

Advertência: há 7 enunciados parecidos.... mas distintos

Cotação das perguntas de escolha múltipla: **0,6**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,2**v.

---

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{C}_A$ o espaço colunas de A. Considere as seguintes afirmações:

   I) O conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = [0]\}$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$.

   II) $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 1$.

   III) $\dim(\mathcal{C}_A) = 1$.

   IV) $\mathcal{C}_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2x + y = 0\}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, III ☐ II, IV ☐ II, III ☐ III, IV

---

2. Seja $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,2,1)$ e $v_3 = v_1 + v_2$. Considere $U = L(\{v_1, v_2\})$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1, v_2 e $V = L(\{v_3\})$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_3. Considere as seguintes afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2, v_3 geram $\mathbb{R}^3$.

   II) Os vectores v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes.

   III) $\dim(U + V) = 2$.

   IV) $\dim(U \cap V) = 1$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II, III ☐ II, III, IV ☐ I, II ☐ III, IV

---

3. As coordenadas v_B do vector $v = (3,2,0)$ na base ordenada $B = \{(1,1,-1),(1,0,2),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ são:

   ☐ $v_B = (1,2,0)$ ☐ $v_B = (2,1,0)$ ☐ $v_B = (1,0,2)$ ☐ $v_B = (0,1,2)$

---

4. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios de grau ≤ 2 na variável $\mathtt{x}$ e o seguinte subespaço linear $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : \; p(-2) = 0\}$. Considere as seguintes afirmações:

   I) $p(\mathtt{x}) = 1 + \mathtt{x} - \mathtt{x}^2 \in V$.

   II) $\dim(V) = 2$.

   III) $\{2 + \mathtt{x}, -4 + \mathtt{x}^2\}$ é uma base de V.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☐ II, III

5. Considere a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A.
   b) Encontre bases para os espaços próprios de A
   c) Verifique se A é diagonalizável.

6. Seja $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ o espaço linear das funções reais de variável real munido com as operações habituais. Considere $V = \mathrm{L}(\{f_1, f_2\})$ o subespaço de E gerado pelas funções f_1, f_2, onde para cada $a, b \in \mathbb{R}$ define-se $f_1(t) = e^{at}$ e $f_2(t) = e^{bt}$. Determine $\dim(V)$, para cada a, b.

Resolução: