Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

(04/DEZEMBRO/2007)
Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número:_____________________________________**Curso:**_____________________

Advertência: há 7 enunciados parecidos.... mas distintos

Cotação das perguntas de escolha múltipla: **0,6**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,2**v.

---

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{C}_A$ o espaço colunas de A. Considere as seguintes afirmações:

   I) O conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = [0]\}$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$.

   II) $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 1$.

   III) $\dim(\mathcal{C}_A) = 1$.

   IV) $\mathcal{C}_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x + y = 0\}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, III ☐ II, IV ☐ II, III ☒ III, IV

Resolução: Usando o produto matricial $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = (x-2y)(x+y)$, pelo que o conjunto dado na afirmação I não é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$. Portanto I é falsa. Como car(A)=1, pelo que dim(Nuc(A))=n^0 de colunas de A-car(A)=3-1=2 e $\dim(\mathcal{C}_A) = car(A) = 1$. Portanto a afirmação II é falsa e a afirmação III é verdadeira. A afirmação IV é veradeira pois $\{(1,-2)\}$ é uma base para $\mathcal{C}_A$ ("colunas de A que correspondem às colunas com pivô na matriz final em escada de linhas") e por outro lado facilmente concluimos que o mesmo vector também é uma base para a recta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x + y = 0\}$.

---

2. Seja $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,2,1)$ e $v_3 = v_1 + v_2$. Considere $U = L(\{v_1, v_2\})$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1, v_2 e $V = L(\{v_3\})$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_3. Considere as seguintes afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2, v_3 geram $\mathbb{R}^3$.

   II) Os vectores v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes.

   III) $\dim(U + V) = 2$.

   IV) $\dim(U \cap V) = 1$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II, III ☒ II, III, IV ☐ I, II ☐ III, IV

Resolução: Por definição o vector v_3 é combinação linear de v_1, v_2, portanto v_1, v_2, v_3 geram um plano em $\mathbb{R}^3$ (note que v_1 e v_2 não são colineares. Logo a característica da matriz 3x3 cujas colunas são os 3 vectores é igual a 3 – verifique!). Portanto a afirmação I é falsa. A afirmação II é verdadeira porque v_3 é combinação linear de v_1, v_2. Como $V \subseteq U$, temos que $U + V = U$ e $U \cap V = U$. Como dim(V)=1 e dim(U)=2, podemos concluir que as afrimações III e IV são verdadeiras.

---

3. As coordenadas v_B do vector $v = (3,2,0)$ na base ordenada $B = \{(1,1,-1),(1,0,2),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ são: ☐ $v_B = (1,2,0)$ ☒ $v_B = (2,1,0)$ ☐ $v_B = (1,0,2)$ ☐ $v_B = (0,1,2)$

Resolução: Sendo $v_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ as coordenadas de v na base B, então $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Facilmente determinamos que $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 0$.

---

4. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios de grau ≤ 2 na variável $\mathtt{x}$ e o seguinte subespaço linear $V = \{p \in \mathcal{P}_2 :\ p(-2) = 0\}$. Considere as seguintes afirmações:

   I) $p(\mathtt{x}) = 1 + \mathtt{x} - \mathtt{x}^2 \in V$.

   II) $\dim(V) = 2$.

   III) $\{2 + \mathtt{x}, -4 + \mathtt{x}^2\}$ é uma base de V.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I ☐ II ☐ III ☒ II, III

Resolução: Sendo $p(x) = 1 + x - x^2$, $p(-2) = 1 - 2 - (-2)^2 = 1 - 2 - 4 = -5$ portanto $p(-2) \neq 0$ logo a afirmação I é falsa. Dado um elemento $p(x) = a + bx + cx^2$ em $\mathcal{P}_2$, $p \in V$ sse $p(-2) = a - 2b + 4c = 0$, pelo que

$$p(x) = (2b - 4c) + bx + cx^2 = b(2 + x) + c(-4 + x^2)$$

portanto $\{2 + \mathtt{x}, -4 + \mathtt{x}^2\}$ gera V, como são linearmente independentes (não são colineares) concluimos que a afirmação III é verdadeira.

---

5. Considere a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A.
   b) Encontre bases para os espaços próprios de A
   c) Verifique se A é diagonalizável.

6. Seja $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ o espaço linear das funções reais de variável real munido com as operações habituais. Considere $V = \mathrm{L}(\{f_1, f_2\})$ o subespaço de E gerado pelas funções f_1, f_2, onde para cada $a, b \in \mathbb{R}$ define-se $f_1(t) = e^{at}$ e $f_2(t) = e^{bt}$. Determine $\dim(V)$, para cada a, b.

Resolução:

5 a) O polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Como os zeros de $p(\lambda)$ são os valores próprios de A, concluimos que $\{1, 2\}$ são os valores próprios de A.

5 b) O espaço próprio associado a $\lambda = 1$ é

$$E(1) = Nuc(A - 1I) = Nuc \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = Nuc \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$$

$$= \{(-y, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\},$$

pelo que $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $E(1)$.

O espaço próprio $E(2)$ associado ao valor próprio $\lambda = 2$ é

$$E(2) = Nuc(A-2I) = Nuc\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = Nuc\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y - z = 0\}$$

$$= \{(0,z,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$$

portanto $\{(0,1,1)\}$ é uma base de $E(2)$.

5 c) Como $ma(1) = mg(1)$ e $ma(2) = mg(2)$ concluimos que a matriz A é diagonalizável. (onde ma designa a multiplicidade algébrica e mg a multiplicidade geométrica)

6) A resposta é dim(V)=$\begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 2 & \text{se } a \neq b \end{cases}$.

É óbvio que se $a = b$, então dim(V)=1, uma vez que neste caso $f_1 = f_2 \neq 0$.

Vamos então supor que $a \neq b$ e provar que f_1, f_2 são linearmente independentes. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) = 0, \text{para todo } t \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Então fazendo $t = 0$ em $(*)$ obtém-se $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ e por outro lado usando $t = 1$ em $(*)$ obtém-se $\alpha_1 e^a + \alpha_2 e^b = 0$. Ora a única solução destas duas equações é de facto a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ uma vez que $a \neq b$. (Verifique!!)