Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (19/OUTUBRO/2007)
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número:______________________________**Curso:**________________

Advertência: há 6 enunciados parecidos.... mas distintos

Cotação das perguntas de escolha múltipla: **0,6**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,2**v.

---

1. Para cada parâmetro real α sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3\alpha \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações:

   I) O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível para qualquer valor de α.

   II) O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível para pelo menos um valor de α.

   III) O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é possível para qualquer valor de α.

   IV) A matriz A_α é invertível para $\alpha = -3$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II ☐ III, IV ☒ II, IV ☐ II, III

Resolução: Usando o método de eliminação de Gauss temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 3\alpha & 3\alpha \end{array}\right] \underset{\substack{-4L_1+L_2 \\ -7L_1+L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & 3\alpha-21 & \alpha-7 \end{array}\right] \underset{-2L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3\alpha-9 & 3\alpha-3 \end{array}\right]$$

e portanto a afirmaç ao I é falsa, assim como III uma vez que $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível para $\alpha = 3$.

---

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e I a matriz identidade 3×3. Considere as seguintes afirmações:

   I) $(1, 0, 0)$ é solução do sistema homogéneo $Au = \mathbf{0}$.

   II) car(A^{-1})=3.

   III) $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II ☒ II, III ☐ I, III ☐ I, II, III

Resolução: Como A é invertível, o sistema $Au = 0$ é possível e determinado, cuja única solução é $u = (0, 0, 0)$. Ou então verifique que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Portanto I é falsa. A afirmação II é claramente verdadeira uma vez que sendo A invertível, $car(A) = car(A^{-1}) = 3$. A afirmação III é verdadeira porque $A - \lambda I$ é uma matriz triangular superior, pelo que so seu determinante é igual ao produto das entradas da diagonal principal de $A - \lambda I$ (que coincide com a expressão da afirmação III).

---

3. Sejam $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = 1$. Considere as seguintes afirmações:

   I) $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

   II) AB invertível se e só se B invertível.

   III) Os sistemas homogéneos $(AB)u = \mathbf{0}$ e $Bu = \mathbf{0}$ têm o mesmo conjunto solução.

A lista completa de afirmações correctas é

☐ I, II ☒ II, III ☐ I, III ☐ I, II, III

Resolução: A afirmação I é falsa: a equação correcta é $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$. A afirmação II é equivalente a: $\det(AB) \neq 0$ sse $\det(B) \neq 0$. Mas como $\det(A) \neq 0$ e $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, concluimos que II é verdadeira. A afirmação II também é verdadeira porque dado que A é invertível $(AB)u = b$ sse $Bu = A^{-1}\mathbf{0}$ mas $A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ donde $Bu = \mathbf{0}$.

---

4. Escreva a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij} = (i - j)$ e determine A^{-1}.

`[0.7 valores]` Resolução: Temos $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

E facilmente concluimos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, usando p.ex. o método de Gauss-Jordan.

5. Considere as seguintes matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.
   a) Calcule $\det(A^T A)$ e verifique se $A^T A$ é invertível. `[1.0 valores]`
   b) Determine o conjunto solução do sistema linear $Au = b$. `[0.5 valores]`
   c) Determine o conjunto solução do sistema linear $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$. `[0.5 valores]`

Resolução: por definição de transposta e produto matricial temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T A = A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Assim $\det(A^T A) = 11 - 9 = 2$. *Como* $\det(A^T A) \neq 0$ *concluimos que* $A^T A$ *é invertível.*
b) Usando o método de eliminação de Gauss facilmente concluimos que o sistema $Au = b$ é impossível, pelo que o conjunto solução deste sistema é $S = \emptyset$.
c) Podemos usar novamenteo método de eliminação de Gauss para concluir que o conjunto solução de $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$ é $S = \{(0,0)\}$. Mais fácil ainda: observar que a matriz $A^T A$ é invertível pelo que o sistema (homogéneo) $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$ é determinado, e que portanto o seu conjunto solução é $S = \{(0,0)\}$.

6. Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Designe por S_1 o conjunto solução de $Au = b$ e por S_2 o conjunto solução de $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$. Prove que $S_1 \subseteq S_2$. `[0.7 valores]`

Resolução: Temos que provar que $x_1 \in S_1 \Rightarrow x_1 \in S_2$, i.e. dado x_1 solução de $Au = b$, então o mesmo x_1 também é solução de $(A^T A)\mathtt{x} = A^T b$. De forma equivalente, temos que provar que:

$$Ax_1 = b \Rightarrow (A^T A)x_1 = A^T b.$$

Mas isto é trivial, pois basta multiplicar a equação matricial $Ax_1 = b$ pela matriz A^T para obter $(A^T A)x_1 = A^T b$, como pertendido. Como observação, note-se que pelo problema 5, podemos concluuir que em geral $S_1 \neq S_2$.