Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (11/JANEIRO/2008)
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ Duração: 3H

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:____________________________ **Turma:**_________________
Advertência: há 9 enunciados parecidos...mas distintos

Teste 3 (1h30m de duração): problemas

I 5	I 6	I 7	I 8	II a	II b	II c	II d	IV b

GRUPO I (8 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,3**v.

---

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada $[A|b]$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$. Considere as seguintes afirmações:

   I) Se $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ é solução de $Au = b$, então $\alpha = 1$.
   II) O sistema $Au = b$ é possível e indeterminado para um único valor de α.
   III) O sistema $Au = b$ é possível e determinado para um único valor de α.
   IV) O sistema $Au = b$ é impossível para um único valor de α.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, II **B)** III, IV **C)** I, IV **D)** II, III

---

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a^2 & -b \\ b & b \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tais que $\det(A) = 1$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det(PA) = \det(AP) = 1$.
   II) $\det(2A) = 2$.
   III) $\det\big((I + P)(A^3 + 2A^2 + I)\big) = 0$, onde I designa a matriz identidade 2×2.
   IV) A entrada (1,2) de A^{-1} é b.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, III **B)** I, IV **C)** III, IV **D)** II, IV

---

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sejam $v_1 = (1, 0, 0, 2), v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (2, 0, 1, a)$. Seja ainda $V = L(\{v_1, v_2, v_3\})$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes para um único valor de a.
   II) dim(V)=3 para $a \neq 2$.
   III) O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V para $a = 2$.
   IV) dim(V)=3 para qualquer valor de a.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, III, IV **B)** I, II, III **C)** I, IV **D)** II, III

4. Seja $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) $\dim(V) = 1$.

II) $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ é uma base de V.

III) $\{(1, 1, 1, 1)\}$ é uma base de $V^\perp$, usando o produto interno usual.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I, II **B)** II, III **C)** I, III **D)** I, II, III

---

5. Considere a base canónica Bc=$\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $(0, 0) \notin \mathrm{Nuc}(T)$.

B) $T\big((2, 3)\big) = (3, -2)$.

C) O escalar $\lambda = 0$ é valor próprio de T.

D) Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\measuredangle\Big(u, v\Big) = \measuredangle\Big(T(u), T(v)\Big)$, onde $\measuredangle$ designa o ângulo.

---

6. Sejam $v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1), p = (1, 1, 1)$ e $E = L(\{v_1, v_2\})$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1 e v_2. Usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, considere a seguinte lista de afirmações:

I) $\dim(E^\perp) = 1$.

II) $\{(1, -2, 1)\}$ é uma base de $E^\perp$.

III) $\{(-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ é uma base ortogonal de E.

IV) $\mathrm{dist}(p, E) = \sqrt{3}$.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I, II, III **B)** II, III, IV **C)** I, III, IV **D)** I, II, III, IV

---

7. Seja F o espaço linear das funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, infinitamente diferenciáveis e $T : F \to F$ a aplição linear $T(f) = f'$, onde f' designa a derivada de f. Considere a lista de afirmações:

I) Para cada $a \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = e^{ax}$ é um vector próprio de T.

II) T é injectiva.

III) Se f é um polinómio de grau 99, então $T(f)$ também é um polinómio de grau 99.

IV) O número de valores próprios de T é finito.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I **B)** II **C)** III **D)** I, IV

---

8. Considere o sistema de equações diferenciais com valor inicial: $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_2 \\ y_1(0) = 8 \text{ e } y_2(0) = 5. \end{cases}$

A solução deste sistema é:

A) $y_1(t) = 3e^t + 5e^{3t},\ y_2(t) = 5e^{3t}$ **B)** $y_1(t) = 8e^t,\ y_2(t) = 5e^{3t}$

C) $y_1(t) = 3e^{3t} + 5e^t,\ y_2(t) = 5e^t$ **D)** $y_1(t) = 3e^t + 5e^{2t},\ y_2(t) = 5e^{3t}$

GRUPO II (4 valores)

Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas como se segue:

$$T_1\big((x, y, z)\big) = (x + y + z, x + 2z), \qquad T_2\big((x, y)\big) = (5y, x - 3y, -2y).$$

a) Determine as representações matricias de T_1 e T_2 nas bases canónicas.
b) Determine bases para $\mathrm{Nuc}(T_1)$ e $\mathrm{Im}(T_2)$ e verifique que $\dim\big(\mathrm{Nuc}(T_1) \cap \mathrm{Im}(T_2)\big) = 0$.
c) Resolva a equação linear $T_1\big((x, y, z)\big) = (3, 3)$.
d) Determine $T_1 \circ T_2\big((x, y)\big)$.

Resolução:

GRUPO III (5 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha^2 - 1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\det(A)$ e verifique que o sistema homogéneo $Au = \mathbf{0}$ é indeterminado se e só se $\alpha = 0$.
b) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A, em função de α.
c) Para $\alpha = 3$ encontre bases para os espaços próprios de A e verifique se A é diagonalizável (para $\alpha = 3$).
d) Determine os valores de α para os quais $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
e) Usando o(s) produto(s) interno(s) em $\mathbb{R}^3$ da alínea d), calcule $||(0, 1, 0)||$.
Resolução:

GRUPO IV (3 valores)

Seja $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ um conjunto não vazio de vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, $E = L(S)$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ gerado por S e P_E a projecção ortogonal sobre E. Considere a matriz $A = [v_1 \ v_2 \cdots v_k] \in \text{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$ cuja coluna j é o vector v_j escrito em coluna, $j = 1, \cdots, k$, e seja $Q = A(A^TA)^{-1}A^T$.

a) Prove que $Q = Q^T$ e $Q^2 = Q$.

b) Prove que $P_E(u) = Q(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Resolução: