Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (25/JANEIRO/2008)
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Duração: 3H

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:____________________________ **Turma:**_________________
Advertência: há 5 enunciados parecidos...mas distintos

GRUPO I (8 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,3**v.

---

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada $[A|b]$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$. Considere as seguintes afirmações:

   I) Existe pelo menos um valor de α tal que $(0,0,1)$ é solução de $Au=b$.
   II) A matriz A é invertível se e só se $\alpha \neq 0$.
   III) O sistema $Au=b$ é possível e determinado para um único valor de α.
   IV) O sistema $Au=b$ é possível e indeterminado para um único valor de α.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, IV **B)** III, IV **C)** I, III **D)** I, II

---

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} b & b \\ -b & a^2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tais que $\det(A) = 1$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $b = 0$.
   II) $\det(PA) = \det(AP) = 1$.
   III) $\det(2A) = 4$.
   IV) $\det\big((P-I)(A^3 - A^2 + I)\big) = 0$, onde I designa a matriz identidade 2×2.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, IV **B)** III, IV **C)** I, III **D)** I, II

---

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{bmatrix}$ e $v = (1,1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\lambda = 0$ é valor próprio de A, para qualquer a.
   II) Se v é vector próprio de A, então $a = -1$.
   III) $p(\lambda) = \lambda^2 - (1+a)\lambda$ é o polinómio característico de A.
   IV) Se A tem um valor próprio duplo, então $a = 0$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, IV **B)** III, IV **C)** I, III **D)** I, II

---

4. Sejam $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$ e $v_1 = (-1, 1, 0, 0), v_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $v_1 \in W$.

   II) $\dim(W) = 3$.

   III) $\{v_1, v_2\}$ é uma base de W.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, III **B)** II, III **C)** I, II, III **D)** I, II

---

5. Considere a base canónica Bc=$\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $(1, 1) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

   B) $T\big((2, 3)\big) = (-1, -5)$.

   C) O escalar $\lambda = 0$ é valor próprio de T.

   D) $T\big((x, x)\big) = (0, 2x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

---

6. Sejam $v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (1, 2, 1)$ e $E = L(\{v_1, v_2\})$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1 e v_2. Usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(E^{\perp}) = 1$.

   II) $\{v_3\}$ é uma base de $E^{\perp}$.

   III) $\{v_1, v_1 + v_2\}$ é uma base ortonormada de E.

   IV) $\mathrm{dist}(2v_3, E)$=$2\big(\mathrm{dist}(v_3, E)\big)$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, IV **B)** I, III **C)** II, IV **D)** III, IV

---

7. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2, na variável x e $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por $T(p) = p' - p$, onde p' designa a derivada de p. Considere a lista de afirmações:

   I) $T(1 + x + x^2) = x - x^2$.

   II) O polinómio nulo $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 \notin \mathrm{Nuc}(T)$.

   III) $\lambda = -1$ é um valor próprio de T.

   IV) O polinómio nulo $p(x) = 0 + 0x + 0x^2$ é vector próprio de T

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, IV **B)** I, III **C)** II, IV **D)** III, IV

---

8. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto solução da equação diferencial $y'(t) = 2y(t)$. Considere as seguintes funções $y_1(t) = e^{2t},\ y_2(t) = e^{2t} + \pi,\ y_3(t) = \pi e^{2t}, y_4(t) = e^{2t+\pi}$.

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{S}$ **B)** $y_1, y_2, y_4 \in \mathcal{S}$ **C)** $y_1, y_3, y_4 \in \mathcal{S}$ **D)** $y_2, y_3, y_4 \in \mathcal{S}$

GRUPO II (6 valores)

Para cada parâmetro real α, sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}$.

a) Verifique que o sistema $Au = b$ é possível se e só se $\alpha = -1$.
b) Justifique que o sistema $(A^T A)\hat{u} = A^T b$ é indeterminado para qualquer α.
c) Prove que $F = \{\hat{u} \in \mathbb{R}^3 : (A^T A)\hat{u} = A^T b\}$ é subespaço linear se e só se $\alpha = 1$.
d) Para cada α, determine todas as soluções de mínimos quadrados do sistema $Au = b$.
e) Determine $\operatorname{dist}\big(A\hat{u}, C_A^{\perp}\big)$, onde $\hat{u}$ é uma solução de mínimos quadrados de $Au = b$ e $C_A^{\perp}$ designa o complemento ortogonal do espaço colunas C_A de A.

Resolução:

GRUPO III (4 valores)

Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas como se segue:

$$T_1\big((x,y,z)\big) = (2x+z, y, x+z), \qquad T_2\big((x,y,z)\big) = (x-z, y, -x+2z).$$

Sejam A_1 e A_2 as representações matricias de T_1 e T_2, respectivamente, na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine A_1 e A_2.

b) Verifique que T_1 e T_2 são transformações lineares invertíveis.

c) Prove que os polinómios característicos de A_1 e A_2 são iguais e justifique que ambas são diagonalizáveis.

d) Verifique que $T_2^{-1}\big((x,y,z)\big) = T_1\big((x,y,z)\big)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução:

GRUPO IV (2 valores)

Sejam A, B matrizes reais $n \times n$ e $\langle u, v \rangle = \sum u_i v_i$ o produto interno usual do espaço linear E=$\mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tais que: $\langle u, v \rangle = \langle Au, Bv \rangle$, para quaisquer $u, v \in E$. Prove que A e B são matrizes invertíveis e que além disso temos $A^{-1} = B^T$.
Resolução: