Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
2^a fase, Alameda

(25/NOVEMBRO/2006)
Duração: 1h:30m

Cursos: LEGM, LEMat, LEAmb, LEAN, LMAC, MEAer, MEBiol, MEC, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

Nome do Aluno:____

Número do Aluno:____
Curso:______________________________ **Turma:**_____________
Advertência: há 8 enunciados parecidos...mas distintos

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo II (c)		
Grupo II (d)		
Grupo III		
	TOTAL	

GRUPO I (5 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,3**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**

---

1. Sejam A, B e C matrizes do tipo $n \times m$, $m \times p$ e $n \times 1$, respectivamente. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Se x_1 é solução do sistema $(AB)u = C$, então Bx_1 é solução de $Au = C$.

   II) Se x_0 é solução do sistema homogéneo $Au = 0$ e x_1 solução de $Au = C$, então $x_0 + x_1$ é solução de $Au = C$.

   III) Se A for uma matriz quadrada e invertível então as soluções de $(AB)u = C$ coincidem com as soluções de $Bu = A^{-1}C$.

   IV) Se A e B forem matrizes quadradas e invertíveis então $(AB)u = C$ é determinado e a única solução é $u = B^{-1}A^{-1}C$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II e IV **B)** I, II, III e IV **C)** III **D)** I

---

2. Sejam $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) PQ não é invertível porque a sua característica não é igual a 3.

   B) A inversa de PQ não existe porque P e Q não são matrizes quadradas.

   C) $(PQ)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   D) $(PQ)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

---

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det(A) = -152$.

   II) $\det(\frac{1}{3}A) = -\frac{152}{3}$.

   III) A entrada $(2,1)$ de A^{-1} é $-\frac{21}{152}$.

   IV) $(3,-1,-4) \in \mathrm{Nuc}(A)$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e IV **B)** I e II **C)** I e III **D)** III e IV

---

4. Para cada $k \in \mathbb{R}$, sejam $u = (1,1,1), v = (0,1,1)$ e $w = (k,2,2)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Os vectores u, v não geram $\mathbb{R}^3$.

   II) Os vectores u, v, w geram $\mathbb{R}^3$, para algum valor de k.

   III) O vector w é combinação linear de u e v, para algum valor de k.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) III **B)** II e III **C)** I e III **D)** I e II

---

5. Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y + z = 0, \ 3x - 6y + 3z = 0\}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $V = \mathrm{Nuc}(A)$.

   II) V é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.

   III) $\{(2,1,0), (-1,0,1)\}$ é uma base de V.

   IV) $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 1$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, II e III **B)** II e III **C)** I e III **D)** II e IV

Nesta parte, Grupos II e III, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (4 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Discuta a característica de A_α em função do parâmetro α.

b) Determine o único α para o qual $A_\alpha u = b$ é impossível.

c) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto solução do sistema $A_\alpha u = b$.

d) Existe algum α para o qual $\{u : \ u \text{ é solução de } A_\alpha u = b\}$ é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$?

Resolução:

GRUPO III (1 valor)

Seja E um espaço linear e F um subespaço linear de E. Sejam $v_1, \cdots, v_n$ vectores de F linearmente independentes e $v \in E$ tal que $v \notin F$. Prove que $v_1, \cdots, v_n, v$ são vectores de E linearmente independentes.

Resolução: