Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Resolução do teste de Álgebra Linear (25/Novembro/2006)

Grupo I

A chave para esta versão de teste é:

1	**2**	**3**	**4**	**5**
B	D	C	C	A

Questão 1. Se x_1 é solução de $(AB)u = C$, então $(AB)x_1 = C$, pelo que usando a distributividade do produto matricial obtém-se:

$$A(Bx_1) = (AB)x_1 = C$$

pelo que Bx_1 é de facto solução de $Au = C$, i.e. a afirmação I é verdadeira.

Se x_1 é solução de $Au = C$, então $Ax_1 = C$ e se x_0 é solução de $Au = 0$ então $Ax_0 = 0$. Portanto

$$A(x_1 + x_0) = Ax_1 - Ax_0 = C - 0 = C$$

logo a afirmação II é verdadeira.

Se A é uma matriz invertível então sabemos que a inversa A^{-1} satisfaz $A^{-1}A = I$ onde I denota a matriz identidade $n \times n$. Pelo que:

$$(AB)u = C \iff A^{-1}(AB)u = A^{-1}C \iff (A^{-1}A)B)u = A^{-1}C \iff (IB)u = A^{-1}C \iff Bu = A^{-1}C,$$

e portanto a afirmação III é verdadeira.

A afirmação IV também é verdadeira, basta mutliplicar $(AB)u = C$ à esquerda pela inversa de (AB) e sabendo que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, i.e.

$$(AB)u = C \iff (AB)^{-1}(AB)u = (AB)^{-1}C \iff (B^{-1}A^{-1}AB)u = B^{-1}A^{-1}C \iff$$

$$\iff (B^{-1}IB)u = B^{-1}A^{-1}C \iff Iu = B^{-1}A^{-1}C \iff u = B^{-1}A^{-1}C.$$

Questão 2. O produto matricial PQ é possível efectuar pois P é do tipo 3×4 e Q do tipo 4×3, obtendo-se $PQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. É claro que $\text{car}(PQ) = 3$ e usando, por exemplo, o método de Gauss-Jordan conclui-se facilmente que $(PQ)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Questão 3. Pela regra de Laplace aplicada à primeira linha da matriz A obtem-se:

$$\det(A) = +1 \det \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - (-2) \det \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$(-28 - 1) + 2(-24 + 3) + 3(-6 - 21) = -29 + 2 \times (-21) + 3 \times (-27) = -152.$$

Portanto a afirmação I é verdadeira. A afirmação II é falsa porque como A é do tipo 3×3 e

$$\det(\frac{1}{3}A) = (\frac{1}{3})^3 \det(A) = -\frac{152}{27}.$$

Usando a matriz dos cofactores, sabemos que (sendo A_{12} o menor (1,2) de A):

$$(A^{-1})_{(2,1)} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{1+2} \det(A_{12}) = -\frac{1}{-152} \det \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{152}(-24 + 3) = -\frac{21}{152},$$

pelo que a afirmação III é verdadeira.

A afirmação IV é falsa uma vez que

$$A\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Questão 4. A afirmação I é verdadeira, uma vez que dois vectores em $\mathbb{R}^3$ nunca geram o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Dado que os dois vectores u e v não são colineares, eles geram de facto um plano, que portanto é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 2.

Seja A a matriz cujas colunas são formadas pelos vectores u, v e w. Para que os vectores geram $\mathbb{R}^3$ para algum k, a característica de A tem que ser 3, para algum k. Aplicando o método de eleminação de Gauss:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto car$(A) \neq 3$, para todo o k, pelo que a afirmação II é falsa.

O vector w é combinação linear se u e v, se o sistema cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$ for possível. Usando os cálulos já efectuados para a afirmação II, concluimos que w é combinação linear se u e v para qualquer k. Portanto a afirmação III é verdadeira.

Questão 5. Por definição de núcleo, temos que $V = \text{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$. Usando o método de eliminação de Gauss, podemos trivialmente obter a matriz A a partir. Conclui-se então que a afirmação I é verdadeira.

Como V é o núcleo de uma matriz, concluimos de imediato que a afirmação II também é verdadeira.

Uma vez que

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x-2y+z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2y-z\} = \{(2y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y, z \in \mathbb{R}\}$$

e que

$$(2y - z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1),$$

conclui-se que $(2, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ geram V. Mas como eles são vectores linearmente independentes, concluimos que eles formam uma base para o espac co linear V. Portanto a afirmação III é verdadeira. A afirmação IV é falsa porque dim Nuc(A)=2.

Nesta parte, Grupos II e III, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (4 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Discuta a característica de A_α em função do parâmetro α.

b) Determine o único α para o qual $A_\alpha u = b$ é impossível.

c) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto solução do sistema $A_\alpha u = b$.

d) Existe algum α para o qual $\{u : u \text{ é solução de } A_\alpha u = b\}$ é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$?

Resolução:

`Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada` $[A_\alpha|b]$:

$$[A_\alpha|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 <-> L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-\alpha L_1 + L_2 \\ -L_2 + L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

a) Portanto, por definição de característica, temos car$(A_\alpha) = \begin{cases} 1, & |\alpha| = 1 \\ 2, & |\alpha| \neq 1 \end{cases}$.

b) O sistema $A_\alpha u = b$ é impossível se e só se car$(A_\alpha) \neq$car$([A_\alpha|b])$. Portanto o único valor é $\alpha = -1$, uma vez que car$([A_{-1}|b]) = 2$ e car$(A_{-1}) = 1$.

c) Para $\alpha = 1$ o conjunto solução S de $A_1 u = b$ é igual ao conjunto solução de cuja matriz aumentada é: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Portanto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 1\} =$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 1 - y - z,\} = \{(1-y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

d) Não. Porque o vector nulo $u = (0,0,0)$ não é um solução de $A_\alpha u = b$ para nenhum valor de α, uma vez que $b \neq \mathbf{0}$.

GRUPO III (1 valor)

Seja E um espaço linear e F um subespaço linear de E. Sejam $v_1, \cdots, v_n$ vectores de F linearmente independentes e $v \in E$ tal que $v \notin F$. Prove que $v_1, \cdots, v_n, v$ são vectores de E linearmente independentes.

Resolução:

Vamos supor que $v_1, \cdots, v_n, v$ são linearmente dependentes.

• Se v for combinação linear de $v_1, \cdots, v_n$ então existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n. \qquad (*)$$

Mas como $v_1, \cdots, v_n$ são vectores de F concluimos que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ também é um vector de F, uma vez que F é um espaço linear. Mas este vector é v pela equação (*), pelo que concluímos que $v \in F$ o que contradiz a hipotese.

• Se v_1 for combinação linear de $v, v_2, \cdots, v_n$ então existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que

$$v_1 = \alpha_1 v + \alpha_2 v_2 \cdots + \alpha_n v_n. \qquad (**)$$

Se $\alpha_1 = 0$ então

$$v_1 = \alpha_2 v_2 \cdots + \alpha_n v_n$$

e portanto os vectores $v_1, \cdots, v_n$ são linearmente dependentes, o que contradiz a hipotese. Se $\alpha_1 \neq 0$, então pela equação (**) temos:

$$v = -\frac{1}{\alpha_1} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n.$$

Portanto concluimos que $v \in F$, porque $\frac{-1}{\alpha_1} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$ é um vector de F. Mas isto contradiz a hipótese de $v \notin F$.

• Podemos repetir o caso anterior para cada vector $v_2, v_3, \cdots, v_{n-1}$ e v_n, encontrando sempre contradições.

Portanto, os vectores $v_1, \cdots, v_n, v$ não são linearmente dependentes, e consequentemente são linearmente independentes, como queriamos demonstrar.