Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (19/JANEIRO/2007)
2^a fase, Alameda
Duração: 3H

Cursos: LEGM, LEMat, LEAmb, LEAN, LMAC, MEAer, MEBiol, MEC, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:___________________________ **Turma:**_________________
Advertência: há 7 enunciados parecidos...mas distintos

Teste 2 (1h30m de duração): problemas

I 4	I 5	I 6	II b	II c	II d	II e	IV b

Resolução

GRUPO I (9 valores)
Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
C	*C*	*C*	*B*	*B*	*B*

---

1. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det(A) = -3$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) O escalar $a = 1$ é o único valor que satisfaz $\det(A) = -3$.

   II) O sistema $Au = b$ é impossível para algum a e alguma matriz coluna $b \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

   III) $\det(-A) = -3$ e $\det(A^{-1}) = -1/3$.

   IV) car(A)=car($[A|b]$) para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, onde $[A|b]$ designa a matriz aumentada.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II e III **C)** III e IV **D)** I e IV

   A afirmação I é falsa pois, $\det(A) = a^2 - 4$, portanto $a^2 - 4 = -3$ tem duas soluções diferentes.
   A afirmação II é falsa porque $\det(A) \neq 0$ implica que o sistema $Au = b$ é possível e determinado para qualquer b, e a única solução é $u = A^{-1}b$.
   A afirmação III é verdadeira porque: $\det(-A) = (-1)^2 \det(A)$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
   A afirmação IV é verdadeira, tendo $\det(A) \neq 0$, car(A)=2, logo car($[A|b]$)=2.

---

2. Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ com $b \neq 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) Se x_0 é solução de $Au = 0$ e x_1 é solução de $Au = b$, então $\pi x_0 - x_1$ é solução de $Au = b$.

   B) O sistema $Au = b$ é determinado se $\det(A) = 0$.

   C) $\mathrm{Nuc}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(A^2)$.

   D) Se b é solução de $Au = b$ então o escalar 1 não é valor próprio de A.

   A afirmação A é falsa, porque $A(\pi x_0 - x_1) = \pi A x_0 - Ax_1 = \pi 0 - b = -b$, uma vez que $Ax_0 = 0$ e $Ax_1 = b$.
   A afirmação B é falsa, porque se $\det(A) = 0$ então A é não invertível e portanto $Au = b$ nunca será determinado.
   A afirmação C é verdadeira. Para provar que $\mathrm{Nuc}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(A^2)$ teremos que provar que dado $u \in \mathrm{Nuc}(A)$ então $u \in \mathrm{Nuc}(A^2)$. Mas se $u \in \mathrm{Nuc}(A)$, então $Au = 0$ o que implica

$A^2u = A0 = 0$ muliplicando a equação $Au = 0$ por A. Isto significa que $u \in \text{Nuc}(A^2)$.
A afirmação D é falsa, porque se b é solução de $Au = b$ então $Ab = b$. Como $b \neq 0$ concluimos que o escalar 1 é valor próprio de A (e b é um vector próprio associado a este valor próprio).

---

3. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ a base do subespaço linear W de $\mathbb{R}^3$, onde $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (1,0,1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $(1,2,1) \in W$.

   II) $W = \{(x,y,z) : \ x - z = 0\}$.

   III) As coordenadas v_B do vector $v = (2,3,2)$ na base B são $v_B = (2,1)$.

   IV) Se $v_B = (3,-1)$ são as coordenadas de v na base B, então $v = (2,3,2)$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e IV **B)** II e III **C)** I, II e IV **D)** I, III e IV

A afirmação I é verdadeira, porque $(1,2,1) = (1,1,1) + (1,0,1)$, i.e. $(1,2,1)$ é combinação linear dos vectores da base dada de W.
A afirmação II é verdadeira, porque p.ex. dim(W)=2, $\dim\{(x,y,z) : \ x - z = 0\} = 2$ e os vectores $(1,1,1), (1,0,1) \in \{(x,y,z) : \ x - z = 0\}$, pelo que W tem diemsão 2 e é subespaço de um espaço de dimensaão 2.
A afirmação III é falsa, porque $(2,3,2) \neq 2v_1 + 1v_2$.
A afirmação IV é verdadeira, porque $(2,3,2) = 3v_1 - 1v_2$.

---

4. Considere a base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ onde $v_1 = (1,2), v_2 = (0,1)$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $M(T; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $(1,1) \in \text{Nuc}(T)$.

   B) $T((2,3)) = (3,18)$.

   C) Zero não é valor próprio de T.

   D) T é injectiva.

A afirmação A é falsa, porque $(1,1) \in \text{Nuc}(T)$ sse $1v_1 + 1v_2 \in \text{Nuc}(A)$ onde A é a representação de T na base B. Mas $1v_1 + 1v_2 = (1,3)$ e $(1,3) \notin \text{Nuc}(A)$.
A afirmação B é verdadeira. Para calcular $T((2,3))$ temos que em primeiro lugar encontrar as coordenadas v_B de $(2,3)$ na base B, depois Av_B fornece as coordenadas de $T((2,3))$ na base B, por definição de representação matricial. Concretamente, $(2,3) = 2v_1 - 1v_2$, $A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ e finalmente

$$T((2,3)) = 3v_1 + 12v_2 = (3,18).$$

A afirmação C é falsa, porque os valores próprios de T e da matriz A são iguais e 0 é valor próprio da matriz uma vez que A é não invertível.
A afirmação D é falsa porque a injectividade de T é equivalente a verificar que $\dim\text{Nuc}(A) = 0$. Todavia é óbvio que $\dim\text{Nuc}(A) = 1$ (=número de colunas de A - car(A)).

---

5. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(-1) - p(1)x^2$ onde $\mathcal{P}_2$ designa o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $T(1 + x^2) = 2 - 2x^2$.

II) $M(T;B,B)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$, onde $B=\{1,x,x^2\}$ é a base canónica de $\mathcal{P}_2$.

III) T é sobrejectiva.

IV) $\{1-x^2,-1+x^2\}$ é uma base para a imagem de T.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I e III **B)** I e II **C)** III e IV **D)** II e IV

A afirmação I é verdadeira, porque considerando $p(x)=1+x^2$, então $p(-1)=2, p(1)=2$, pelo que $T(1+x^2)=2-2x^2$.
A afirmação II é verdadeira, porque $T(1)=1-x^2=1+0x-1x^2$ e assim obtém-se a primeira coluna da matriz, por definição de representação matricial. A segunda e terceira colunas resultam de $T(x)=-1-x^2$ e $T(x^2)=1-x^2$, respectivamente.
A afirmação III é falsa, porque T é sobrejectiva sse dim(Im(T))=dim($\mathcal{P}_2$) porque $\mathcal{P}_2$ é o espaço de chegada de T. Ora dim(Im(T))=car(A)=2 e dim$\mathcal{P}_2=3$.
A afirmação IV é falsa, porque p.ex. os polinómios dados são linearmente dependentes.

6. Seja $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z=0\}$ e $p=(1,1,-2,0)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) $\dim(W^\perp)=1$.

II) dist$(p,W^\perp)$=0.

III) dist(p,W)=0.

IV) $\{(1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base ortogonal de W.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I e II **B)** I e III **C)** III e IV **D)** I, II, III e IV

A afirmação I é verdadeira, porque dim(W)=3, e portanto $\dim(W^\perp)=1$.
A afirmação II é falsa, porque $p\in W$, portanto dist$(p,W^\perp)=||p||$.
A afirmação III é verdadeira, porque $p\in W$.
A afirmação IV é falsa, porque os vectores da lista formam de facto uma base de W, no entanto dois deles não são ortogonais.

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (5 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A=\begin{bmatrix}\alpha & \alpha^2-1 & 0\\ 0 & 2\alpha & \alpha\\ 0 & \alpha & 2\alpha\end{bmatrix}$, e $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle(x,y,z),(a,b,c)\rangle=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\det(A)$ e verifique que o sistema homogéneo $A\mathbf{x}=0$ é indeterminado se e só se $\alpha=0$.
b) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A, em função de α.
c) Para $\alpha=2$ encontre bases para os espaços próprios de A e verifique se A é diagonalizável (para $\alpha=2$).
d) Determine os valores de α para os quais $\langle\cdot,\cdot\rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

e) Usando o(s) produto(s) interno(s) em $\mathbb{R}^3$ da alínea d), calcule o ângulo entre os vectores $u = (0,1,0)$ e $v = (0,0,1)$.

Resolução:

a) Usando a regra de Laplace na primeira coluna de A temos

$$\det(A) = \alpha \det \begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha(4\alpha^2 - \alpha^2) = 3\alpha^3.$$

O sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ é indeterminado sse a matriz A for não invertível sse $3\alpha^3 = 0$. Logo $\alpha = 0$ é o único valor que torna o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ indeterminado.

b) O polinómio característico de A é, usando novamente a regra de Laplace na primeira coluna,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \alpha^2 - 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - \lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha - \lambda \end{bmatrix} = (\alpha - \lambda) \det \begin{bmatrix} 2\alpha - \lambda & \alpha \\ \alpha & 2\alpha - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$(\alpha - \lambda)\Big((2\alpha - \lambda)^2 - \alpha^2\Big) = (\alpha - \lambda)(2\alpha - \lambda - \alpha)(2\alpha - \lambda + \alpha) = (\lambda - \alpha)^2(3\alpha - \lambda).$$

Portanto $\{\alpha, 3\alpha\}$ são os valores próprios de A.

c) Para $\alpha = 2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são $\{2, 6\}$ por b). Observe que a multiplicidade algébrica do primeiro valor próprio é 2 (raiz dupla de $p(\lambda)$) enquanto que a multiplicidade algébrica do segundo valor próprio é 1. Vamos determinar bases para cada espaço próprio E_2 e E_6. Como $E_2 = \mathrm{Nuc}(A - 2I) = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, concluimos que

$$E_2 = \{(x, y, z) : \ 3y = 0, 2y + 2z = 0\} = \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}.$$

Logo $\dim E_2 = 1$ (=multiplicidade geometrica) e $\{(1, 0, 0)\}$ é uma base de E_2. Para o segundo valor próprio obtém-se $E_6 = \mathrm{Nuc}(A - 6I) = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. Portanto

$$E_6 = \{(x, y, z) : \ -4x + 3y = 0, -2y + 2z = 0\} = \{(x, y, z) : x = \frac{3}{4}z, y = z\} = \{(\frac{3}{4}z, z, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

Logo $\dim E_6 = 1$ e $\{(\frac{3}{4}, 1, 1)\}$ é uma sua base.

A matriz A (com $\alpha = 2$) não é diagonalizável uma vez que as muliplicidades algébrica e geometrica do primeiro valor próprio não são iguais.

d) A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$ sse a matriz for simétrica $A = A^T$ e todos os valores próprios de A forem reais estritamente positivos.

Ora $A = A^T$ implica $\alpha^2 - 1 = 0$, i.e. A é simétrica somente para $\alpha \in \{-1, 1\}$. Finalmente usando b) concluimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$ sse $\alpha = 1$.

e) Por definição o ângulo $\measuredangle(u, v)$ entre os vectores $u = (0, 1, 0)$ e $v = (0, 0, 1)$ é $\arccos \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| ||v||}$. Usando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ com $\alpha = 1$, veja d), temos $\langle u, v \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$,

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{2} \text{ e analogamente } ||v|| = \sqrt{2}.$$

Portanto, $\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

GRUPO III (4 valores)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as soluções de mínimos quadrados associadas ao sistema $A\mathrm{x} = b$.

b) Foi observado que os lucros obtidos pelo venda de um automóvel novo na União Europeia nas 3 primeiras semanas foram:

Semana	1	2	3
Lucros (em milhões de euros)	$1,5$	$0,5$	3

Vamos representar as semanas por x e o lucro semanal por y. Encontre a recta $y = \alpha + \beta x$ de mínimos quadrados relacionando x e y. Use a recta obtida para estimar os lucros na semana 6.

Resolução:
a) As soluções de mínimos quadrados de $A\mathrm{x} = b$ são as soluções do sistema $A^T A\hat{x} = A^T b$, onde $\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Neste caso, temos $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{23}{2} \end{bmatrix}$. Note que como as colunas de A são vectores linearmente independentes, existe uma única solução de mínimos quadrados. Tendo as matrizes $A^T A$ e $A^T b$ podemos recorrer, p.ex., ao método de eliminação para obter $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

b) Note que $1,5 = \frac{3}{2}$ e $0,5 = \frac{1}{2}$. Queremos determinar a recta $y = \alpha + \beta x$ que *melhor aproxima* os pontos $(1, \frac{3}{2}), (2, \frac{1}{2}), (3, 3)$, i.e. $\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha + 2\beta = \frac{1}{2} \\ \alpha + 3\beta = 3 \end{cases}$. Portanto as matrizes dos coeficientes deste sistema são as matrizes A e b acima indicadas e a solução de mínimos quadrados da-nos a recta que melhor aproxima os dados da tabela (note que os sitema $A\mathrm{x} = b$ é impossível!). Por a) temos $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{3}{4}$. Portanto a recta é $y = \frac{1}{6} + \frac{3}{4}x$. Portanto para $x = 6$ temos $y = \frac{1}{6} + \frac{18}{4} = \frac{14}{3} \approx 4,66$ milhões de euros.

GRUPO IV (2 valores)

Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Considere o sistema linear $Au = b$ e designe por S_1 o seu conjunto solução. Seja ainda o sistema $A^T Av = A^T b$ e S_2 o seu conjunto solução.

a) Prove que $S_1 \subseteq S_2$.
b) Prove que $S_1 = S_2$ se $S_1 \neq \emptyset$.

Resolução:
a) Para provar que $S_1 \subseteq S_2$ temos que provar que dado $u \in S_1$ então $u \in S_2$. Ora isto é trivial uma vez que $Au = b$ implica $A^T Au = A^T b$, multiplicando $Au = b$ por A^T.
b) Por a) basta provar que $S_2 \subseteq S_1$. Seja $v \in S_2$. Queremos provar que $v \in S_1$. Como $S_1 \neq \emptyset$ concluimos que $b \in \mathcal{C}_A$ onde $\mathcal{C}_A$ designa o espaço gerado pelas colunas de A (note que $Av \in \mathcal{C}_A$ para qualquer vector v). Portanto $Av - b \in \mathcal{C}_A$.

Provamos agora que $Av - b \in \mathcal{C}_A^\perp$ o complemento ortogonal do espaço das colunas de A. Ora se $A^T Av = A^T b$ então $A^T(Av - b) = 0$ pelo que $Av - b \in \mathrm{Nuc}(A^T)$. Por outro lado $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathcal{C}_A^\perp$ (uma vez que $\mathcal{C}_A = \mathcal{L}_{A^T}$ e $\mathcal{L}_{A^T}^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T)$). Logo $Av - b \in \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_A^\perp$, mas $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_A^\perp = \{0\}$ pelo que $Av - b = 0$ logo $Av = b$, portanto $v \in S_1$. QED.