Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (19/JANEIRO/2007)
2^a fase, Alameda — Duração: 3H

Cursos: LEGM, LEMat, LEAmb, LEAN, LMAC, MEAer, MEBiol, MEC, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:____________________________ **Turma:**__________________
Advertência: há 7 enunciados parecidos...mas distintos

Teste 2 (1h30m de duração): problemas

I 4	I 5	I 6	II b	II c	II d	II e	IV b

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo II (c)		
Grupo II (d)		
Grupo II (e)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
Grupo IV (a)		
Grupo IV (b)		
	TOTAL	

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

---

1. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det(A) = -3$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) O escalar $a = 1$ é o único valor que satisfaz $\det(A) = -3$.

   II) O sistema $Au = b$ é impossível para algum a e alguma matriz coluna $b \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

   III) $\det(-A) = -3$ e $\det(A^{-1}) = -1/3$.

   IV) car(A)=car($[A|b]$) para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, onde $[A|b]$ designa a matriz aumentada.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II e III **C)** III e IV **D)** I e IV

---

2. Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ com $b \neq 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) Se x_0 é solução de $Au = 0$ e x_1 é solução de $Au = b$, então $\pi x_0 - x_1$ é solução de $Au = b$.

   B) O sistema $Au = b$ é determinado se $\det(A) = 0$.

   C) $\mathrm{Nuc}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(A^2)$.

   D) Se b é solução de $Au = b$ então o escalar 1 não é valor próprio de A.

---

3. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ a base do subespaço linear W de $\mathbb{R}^3$, onde $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (1,0,1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $(1,2,1) \in W$.

   II) $W = \{(x,y,z): \ x - z = 0\}$.

   III) As coordenadas v_B do vector $v = (2,3,2)$ na base B são $v_B = (2,1)$.

   IV) Se $v_B = (3,-1)$ são as coordenadas de v na base B, então $v = (2,3,2)$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e IV **B)** II e III **C)** I, II e IV **D)** I, III e IV

4. Considere a base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ onde $v_1 = (1,2), v_2 = (0,1)$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $M(T;B,B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $(1,1) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

   B) $T((2,3)) = (3,18)$.

   C) Zero não é valor próprio de T.

   D) T é injectiva.

---

5. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = p(-1) - p(1)x^2$ onde $\mathcal{P}_2$ designa o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $T(1 + x^2) = 2 - 2x^2$.

   II) $M(T;B,B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, onde $B = \{1, x, x^2\}$ é a base canónica de $\mathcal{P}_2$.

   III) T é sobrejectiva.

   IV) $\{1 - x^2, -1 + x^2\}$ é uma base para a imagem de T.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** I e II **C)** III e IV **D)** II e IV

---

6. Seja $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0\}$ e $p = (1,1,-2,0)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(W^\perp) = 1$.

   II) $\mathrm{dist}(p, W^\perp)$=0.

   III) $\mathrm{dist}(p, W)$=0.

   IV) $\{(1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1)\}$ é uma base ortogonal de W.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II **B)** I e III **C)** III e IV **D)** I, II, III e IV

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (5 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x,y,z),(a,b,c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\det(A)$ e verifique que o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ é indeterminado se e só se $\alpha = 0$.

b) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A, em função de α.
c) Para $\alpha = 2$ encontre bases para os espaços próprios de A e verifique se A é diagonalizável (para $\alpha = 2$).
d) Determine os valores de α para os quais $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
e) Usando o(s) produto(s) interno(s) em $\mathbb{R}^3$ da alínea d), calcule o ângulo entre os vectores $u = (0,1,0)$ e $v = (0,0,1)$.

Resolução:

GRUPO III (4 valores)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as soluções de mínimos quadrados associadas ao sistema $A\mathtt{x} = b$.

b) Foi observado que os lucros obtidos pelo venda de um automóvel novo na União Europeia nas 3 primeiras semanas foram:

Semana	1	2	3
Lucros (em milhões de euros)	$1,5$	$0,5$	3

Vamos representar as semanas por x e o lucro semanal por y. Encontre a recta $y = \alpha + \beta x$ de mínimos quadrados relacionando x e y. Use a recta obtida para estimar os lucros na semana 6.

Resolução:

GRUPO IV (2 valores)

Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Considere o sistema linear $Au = b$ e designe por S_1 o seu conjunto solução. Seja ainda o sistema $A^T Av = A^T b$ e S_2 o seu conjunto solução.

a) Prove que $S_1 \subseteq S_2$.

b) Prove que $S_1 = S_2$ se $S_1 \neq \emptyset$.

Resolução: