Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (08/FEVEREIRO/2007)
2^a fase, Alameda

Duração: 3H

Cursos: LEGM, LEMat, LEAmb, LEAN, LMAC, MEAer, MEBiol, MEC, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:___________________________ **Turma:**_________________
Advertência: há 7 enunciados parecidos...mas distintos

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo II (c)		
Grupo II (d)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
Grupo III (c)		
Grupo IV (a)		
Grupo IV (b)		
	TOTAL	

GRUPO I (9 valores)
Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

---

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Se x_0 é solução de $A_\alpha u = b$, então $\alpha = 1$.
   II) Se x_1 é solução do sistema homogéneo $A_\alpha u = 0$, então $\alpha = 1$.
   III) Para $\alpha = 1$, $x_0 + kx_1$ é solução de $A_1 u = b$, para todo o $k \in \mathbb{R}$.
   IV) Se A_α for invertível, então $u = A_\alpha b$ é a única solução do sistema $A_\alpha^{-1} u = b$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II e III **C)** III e IV **D)** I, II, III e IV

---

2. Considere os vectores $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,2,3)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) Os vectores v_1 e v_2 geram uma recta em $\mathbb{R}^3$.
   B) O conjunto $\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
   C) O vector $w = (1,1,-2)$ é ortogonal a v_1 e a v_2.
   D) As coordenadas de $u = (5,7,9)$ na base $B = \{v_1, v_2\}$ de $L(\{v_1, v_2\})$ são $u_B = (3,2)$.

---

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$, seja $A = \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $A^T A = \begin{bmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$.

   II) $A^T A$ é invertível para algum a.

   III) Existe mais do que uma solução de mínimos quadrados associada ao sistema $A^T u = b$, para algum $b \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

   IV) A matriz AA^T é invertível para algum $a \in \mathbb{R}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II **B)** II e III **C)** III e IV **D)** I e IV

4. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ a transformação linear tal que $M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{P}_1$ designa o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 1, na variável $\mathtt{x}$. Bc designa base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1$, respectivamente. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $(1, 1) \in \mathrm{Nuc}(T)$.

   B) T é injectiva.

   C) $T((2, 3)) = (5, 10)$.

   D) $T((2, 3)) = 5 + 10\mathtt{x}$.

5. Para cada $\gamma \in \mathbb{R}$, seja $A_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) A matriz A_γ é diagonalizável para algum γ.

   II) A matriz A_γ é diagonal para todo o γ.

   III) Se $u = (1, 0, 1) \in \mathrm{Nuc}(A_\gamma)$ então $\gamma = -1$.

   IV) O vector $v = (0, 1, 0)$ é um vector próprio de A_γ, pois $A_\gamma v = 1v$ para todo o γ.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, II e III **B)** I, II e IV **C)** III e IV **D)** I, III e IV

6. Seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0\}$ e $p = (1, 0, -1, 0)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(W) = 3$.

   II) $\mathrm{dist}(p, W^\perp)$=0.

   III) $\mathrm{dist}(p, W)$=0.

   IV) $\{(0, 1, -1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base ortogonal de W.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II **B)** II e III **C)** III e IV **D)** I e III

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (5 valores)

Para cada α e β escalares reais, considere as matrizes $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$. Seja ainda $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que a sua representação matricial na base canónica é dada pela matriz A_1 (isto é, A_α tomando $\alpha = 1$).

a) Determine os valores de α e β para os quais $A_\alpha u = b_\beta$ é possível e indeterminado.

b) Determine o conjunto solução do sistema $A_1 u = b_1$, com $\alpha = \beta = 1$.

c) Verifique se T é injectiva ou sobrejectiva e determine uma base para a imagem de T.

d) Determine o ângulo $\measuredangle\Big(T(u), T(v)\Big)$ entre os vectores $T(u)$ e $T(v)$ onde $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, 0, 2)$, usando o produto interno usual.

GRUPO III (4 valores)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule a matriz inversa de P.

b) Determine os valores próprios de A, bases para cada espaço próprio e justifique que A é diagonalizável. Justifique também que temos $A = PDP^{-1}$, sem fazer cálculos.

c) Calcule a entrada $(3,2)$ da matriz A^{10}.

Resolução:

GRUPO IV (2 valores)

Sejam $A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, e designe por $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{L}_{BA}$ os espaços gerados pelas linhas de A e BA, respectivamente.

a) Prove que $\mathrm{Nuc}(A) \subseteq \mathrm{Nuc}(BA)$ e $\mathcal{L}_{BA} \subseteq \mathcal{L}_A$.

b) Sendo B invertível, prove que $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(BA)$ e $\mathcal{L}_{BA} = \mathcal{L}_A$.

Resolução: