Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (04/NOVEMBRO/2005)
LEIC-Alameda Duração: 1h:30m

Nome do Aluno:____

Número do Aluno:____

Curso:____ **Turma:**__________________

Advertência: há 8 enunciados parecidos.... mas distintos

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo II (c)		
Grupo II (d)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
TOTAL		

GRUPO I (4 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,3**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**

1. Seja $\mathcal{S}_\gamma$ o sistema de equações lineares representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \gamma \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\gamma^2 \end{bmatrix}$$

onde γ é um parâmetro real. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) Existem infinitos valores de γ para os quais o sistema de equações $\mathcal{S}_\gamma$ é possível.

B) Existe exactamente um valor de γ para o qual o sistema é possível.

C) Existem exactamente dois valores de γ para os quais o sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é possível e tem grau de indeterminação 2.

D) Existe mais do que um valor de γ para os quais o sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é possível e tem grau de indeterminação 1.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e B tal que $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

II) $\text{Nuc}(B) = \{(0,0)\}$.

III) $\text{Nuc}(A + B^{-1}) = \text{Nuc}(A) + \text{Nuc}(B^{-1})$.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I **B)** II **C)** I e II **D)** III

3. Considere o espaço linear $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w=0\}$ e os vectores $v_1 = (1,-1,1,-1), v_2 = (-1,-2,3,0)$, $v_3 = (0,0,1,-1)$ e $v_4 = (0,-3,4,-1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes.

   II) Os vectores v_1, v_2, v_3, v_4 geram V, mas não geram $\mathbb{R}^4$.

   III) A dimensão de V é 3 (isto é, $\dim(V) = 3$).

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II **B)** II e III **C)** III **D)** I e III

4. Seja $W = L(\{v_1, v_2\})$ o espaço gerado pelos vectores $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (0,-1,1)$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Se $(1,2)$ são as coordenadas do vector $u \in W$ na base $\{v_1, v_2\}$, então $u = (1,-1,3)$.

   II) O conjunto $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ constitui uma base para W.

   III) Existe um vector v_3 de $\mathbb{R}^3$ tal que $v_3 \notin W$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e III **B)** II e III **C)** I e III **D)** I e II

Nesta parte, Grupos II e III, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (4,5 valores)

Para cada parâmetro real k, seja $A_k = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ k & k & 1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

a) Discuta a característica de A_k em função do parâmetro k.

b) Faça a discussão das dimensões do espaço das colunas e do núcleo de A_k.

c) Determine uma base para $\mathrm{Nuc}(A_{-1})$ (onde A_{-1} é a matriz A_k para $k=-1$).

d) Verifique se $(2,1,0)$ é solução do sistema linear $A_{-1}u = b$. Encontre o conjunto solução de $A_{-1}u = b$.

Resolução:

GRUPO III (1,5 valores)

Seja $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ o espaço linear das funções reais de variável real munido com as operações habituais. Considere os subconjuntos E_+ e F de E definidos como se segue:
$E_+ = \{f \in E : f(x) > 0, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}\}$,
$F = \{g \in E : \; g(x) = \log(f(x)), \; \text{ para alguma função } f \in E_+\}$.

a) Prove que E_+ não é subespaço linear de E.

b) Prove que F é subespaço linear de E.

Resolução: