Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Resolução do teste de Álgebra Linear (04/Novembro/2005)

Grupo I

A chave para esta versão de teste é:

1	2	3	4
D	C	B	A

Problema 1. Aplicando o método de eliminação de Gauss temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -\gamma^2 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\gamma^2 \end{array}\right].$$

Portanto o sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é possível se e só se $2-\gamma^2=0$. Em ambos os casos $\gamma=\pm\sqrt{2}$ cada sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é possível e determinado. Além disso, para estes casos o número de variáveis livres é igual a 1 = grau de indeterminação. O sistema $\mathcal{S}_\gamma$ é impossível para cada γ tal que $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$. Portanto a única afirmação verdadeira é a afirmação D).

Problema 2. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Portanto

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

pelo que a afirmação I) é verdadeira. A afirmação II) é verdadeira porque a matriz B é invertível. Finalmente a afirmação III) é falsa, pois $\mathrm{Nuc}(A)+\mathrm{Nuc}(B^{-1}) = \{(0,0)\}$ uma vez que A e B^{-1} são matrizes invertíveis e

$$\mathrm{Nuc}(A+B^{-1}) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

que não sendo uma matriz invertível o seu núcleo é diferente do vector nulo (ver teorema 30 das aulas teóricas).

Problema 3. A afirmação I) é falsa, porque se considerar a matriz A cujas colunas são formadas pelos vectores v_1, v_2, v_3 e v_4, a sua característica é 3 e não 4. A afirmação II) é verdadeira:

$$V = \{(x,y,z,w):\ x=-y-z-w\} = \{(-y-z-w,y,z,w) : y,z,w \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{y(-1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+w(-1,0,0,1)\}$$

pelo que $\dim(W)=3$. Como a $\mathrm{car}(A)=3$ onde A é a matriz anterior e $v_1,v_2,v_3,v_4 \in W$ concluimos que eles geram W, embora não sejam linearmente independentes. A $\dim(\mathbb{R}^4)=4$ e $\mathrm{car}(A)=3$, pelo que eles não podem gerar $\mathbb{R}^4$

A afirmação III) também é verdadeira – ver cálculos na afirmação II).

Problema 4. A afirmação I) é verdadeira porque $u = \mathbf{1}v_1 + \mathbf{2}v_2$. A afirmação II) é verdeira porque $\dim(W)=2$ e os vectores $v_1+v_2=(1,0,2)$ e $v_1-v_2=(1,2,0)$ são linearmente independentes (considere a matriz A cujas colunas são os vectores $(1,0,2)$ e $(1,2,0)$. A $\mathrm{car}(A)=2$=número de vectores).

Finalmente, a afirmação III) também é verdadeira, basta considerar a matriz B cujas colunas são os vectores v_1, v_2 e $v_3=(a,b,c)$ e discuta a característica de B em função dos parâmetros a,b e c. Há casos em que $\mathrm{car}(B)=3$, por exemplo $v_3=(1,0,0)$ é um vector que não pertence a W e é tal que $\{v_1,v_2,v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Grupo II

Aplicando sucessivamente o método de eliminação de Gauss obtém-se a matriz A'_k em escada de linhas como se segue:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ k & k & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \\ -kL_1+L_3 \\ -kL_1+L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k^2 \\ 0 & k-k^2 & 1-k^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-(1+k)L_2+L_3 \\ -k(1+k)L_2+L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{bmatrix} \underset{-L_3+L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: A'_k.$$

a) Portanto, por definição de característica, temos $\mathrm{car}(A_k) = \begin{cases} 3, & k \notin \{-1,1\} \\ 2, & k=-1 \\ 1, & k=1 \end{cases}$.

b) Seja $\mathcal{C}_{A_k}$ o espaço gerado pelas colunas de A_k. Usando o <u>teorema 26</u> das aulas teóricas:

$$\dim(\mathcal{C}_{A_k}) = \mathrm{car}(A_k)$$

para todo o k. Usando novamente o <u>teorema 26</u> e a alínea a) temos:

$$\dim\mathrm{Nuc}(A_k) = \text{número de } \underline{\text{colunas}} \text{ de } A_k - \mathrm{car}(A_k) = 3 - \mathrm{car}(A_k) = \begin{cases} 0, & k \notin \{-1,1\} \\ 1, & k=-1 \\ 2, & k=1 \end{cases}.$$

c) $\mathrm{Nuc}(A_{-1}) = \mathrm{Nuc}(A'_{-1}) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x-y-z=0, \ 2y=0\} =$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x=z, \ y=0\} = \{(z,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$.
Como, para cada escalar z, $(z,0,z) = z(1,0,1)$ conclui-se que o vector $(1,0,1)$ gera $\mathrm{Nuc}(A_{-1})$.
Além disso, $(1,0,1)$ é um vector linearmente independente, portanto o conjunto $\{(1,0,1)\}$ é uma base de $\mathrm{Nuc}(A_{-1})$.

d) Facilmente se verifica que $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Usando c) e o <u>teorema 6</u> das aulas teóricas temos que o conjunto solução S de $A_{-1}u = b$ é
$S = (2,1,0) + \{(x,0,x) : \ x \in \mathbb{R}\} = \{(x+2,1,x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.
Resolução alternativa: pode aplicar o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada $[A_{-1}|b]$ e chegar ao mesmo resultado. Note que o sistema $A_{-1}u = b$ <u>não é</u> equivalente ao sistema $A'_{-1}u = b$!!!)

Grupo III

a) O "vector nulo" do espaço linear E é a função constante igual a zero. Esta função não pertence ao conjunto E_+, portanto E_+ não é subespaço linear de E.
b) (i) O "vector nulo" pertence a F, uma vez que $0 = \log(1)$ onde 1 é função constante igual a 1.
(ii) Se $g_1 = \log(f_1)$ e $g_2 = \log(f_2)$ onde $f_1, f_2 \in E_+$, então

$$(g_1+g_2)(x) = g_1(x)+g_2(x) = \log(f_1(x))+\log(f_2(x)) = \log\Big(f_1(x)f_2(x)\Big) = \log\Big((f_1f_2)(x)\Big), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pelo que $(g_1+g_2)(x) = \log\big((f_1f_2)(x)\big)$ e portanto $g_1+g_2 \in F$.
(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g = \log(f) \in F$. Como

$$(\lambda g)(x) = \lambda g(x) = \lambda \log(f(x)) = \log(f(x)^\lambda), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pelo que $(\lambda g)(x) = \log(f(x)^\lambda)$ e portanto $\lambda g \in F$. Pelo <u>teorema 15</u> das aulas teóricas F é subsespaço linear de E. QED