Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Resolução do Exame de Álgebra Linear (19/Janeiro/2006)

Grupo I

A chave para esta versão de exame é:

1	2	3	4	5	6
A	A	A	B	C	D

Grupo II

a) Seja A a matriz cujas linhas são formadas pelos vectores v_1, v_2, v_3 e v_4. Portanto $E = L_A$ é o espaço linhas de A enquanto $E^\perp = \text{Nuc}(A)$. Aplicando o método de eliminação de Gauss obtém-se a matriz A' em escada de linhas como se segue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \\ -L_1+L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_3+L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

Como car(A)=3, $\dim(E) = 3$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de E. Vamos aplicar a esta base o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base $\{w_1, w_2, w_3\}$ ortogonal de E:
$w_1 = v_1 = (1, 0, 0, 1)$,
$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} v_1 = v_2 - \frac{0}{\langle v_1,v_1\rangle} v_1 = v_2 = (1, 1, -1, -1)$,
$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle v_3,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} v_1 = (0, 0, 1, 1) - \frac{-2}{4}(1, 1, -1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Vamos de seguida encontrar uma base para o complemento ortogonal $E^\perp$. Note que como $\dim(E) = 3$ e $\dim(E)+\dim(E^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4)$ concluimos de imediato que $\dim(E^\perp) = 1$. Como v_1, v_2, v_3 é uma base de E

$$E^\perp = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ \langle (x, y, z, w), v_1\rangle = 0, \ \langle (x, y, z, w), v_2\rangle = 0, \ \langle (x, y, z, w), v_3\rangle = 0\},$$

portanto
$E^\perp = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x + w = 0, \ x + y - z - w = 0, \ z + w = 0\} =$
$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x = -w, \ y = w, \ z = -w\} = \{(-w, w, -w, w) : \ w \in \mathbb{R}\}$.
Portanto $\{u_1 = (-1, 1, -1, 1)\}$ é uma base (ortogonal) de $E^\perp$.

b) Por definição de distância, $\text{dist}(u_0, E^\perp) = ||P_E(u_0)||$, isto é, a norma da projecção ortogonal de u_0 sobre E. Sabemos que $P_E(u_0) = u_0 - P_{E^\perp}(u_0)$, portanto usando a base (ortogonal) $\{u_1\}$ de $E^\perp$ encontrada em a) obtém-se:

$$||P_E(u_0)|| = ||u_0 - P_{E^\perp}(u_0)|| = ||u_0 - \frac{\langle u_0, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1|| = ||u_0 - \frac{0}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1|| = ||u_0|| = \sqrt{6}.$$

Grupo III

a) Seja $Bc = \{e_1, \ e_2, \ e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ onde $e_1 = (1, 0, 0), \ e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$.
Como temos
$T_\gamma(e_1) = (\gamma, 0, 0) = \gamma e_1 + 0e_2 + 0e_3$,
$T_\gamma(e_2) = (0, -1, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3$,
$T_\gamma(e_3) = (2, 2, 1) = 2e_1 + 2e_2 + 1e_3$,

podemos concluir que, por definição de representação matricial, a matriz $M(T_\gamma; Bc, Bc)$ que representa T_γ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é a matriz A_γ.

b) Como A_γ representa T_γ na base canónica de $\mathbb{R}^3$, os valores e vectores próprios da matriz A_γ coincidem com os valores e vectores da transformação linear T_γ. Seja $p(\lambda)$ o polinómio característico de A_γ. Então:

$$p(\lambda) = \det(A_\gamma - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \gamma - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (\gamma - \lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda),$$

uma vez que o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto das entradas na diagonal principal. Portanto $\{-1, 1, \gamma\}$ são os valores próprios de A_γ. Temos 3 casos a considerar:

Caso 1: Se $\gamma \notin \{-1, 1\}$, então temos 3 valores próprios diferentes em $\mathbb{R}^3$, pelo que a matriz A_γ é diagonalizável. Note que nestes casos a multiplicidade algébrica (ma) de cada valor próprio é igual a 1 e portanto a multiplicidade geométrica (mg) de cada valor próprio também é 1. Em resumo:

valor próprio	ma	mg
-1	1	1
1	1	1
γ	1	1

Caso 2: Seja $\gamma = 1$. Então $\{-1, 1\}$ são os valores próprios de A_1 em que a multiplicidade algébrica do primeiro valor próprio é 1 enquanto que a do segundo valor próprio é 2. Vamos determinar a multiplicidade geométrica do segundo valor próprio (a do primeiro é obviamente 1): o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ é

$$E(1) = \mathrm{Nuc}(A_1 - 1I) = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathrm{car}(A_1 - 1I) = 2$, $\dim \mathrm{Nuc}(A_1 - 1I) = 1$ e portanto a multiplicidade geométrica deste valor próprio é 1. Em resumo:

valor próprio	ma	mg
-1	1	1
1	2	1

pelo que a matriz A_γ para $\gamma = 1$ não é diagonaizável, pois a multiplicidades algébrica e geométrtica do valor próprio $\lambda = 1$ são diferentes.

Caso 3: Seja $\gamma = -1$. Então $\{-1, 1\}$ são os valores próprios de A_1 em que a multiplicidade algébrica do primeiro valor próprio é 2 enquanto que a do segundo valor próprio é 1. Vamos determinar a multiplicidade geométrica do primeiro valor próprio O Espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = -1$ é

$$E(-1) = \mathrm{Nuc}(A_{-1} - (-1)I) = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pelo que a multiplicidade geométrica é igual a 2 (note que $\mathrm{car}(A_{-1} - (-1)I) = 1$). Em resumo

valor próprio	ma	mg
-1	2	2
1	1	1

e portanto A_γ para $\gamma = -1$ é diagonalizável.

Conclusão: A_γ é diagonalizável se e só se $\gamma \neq 1$.

Finalmente para construirmos uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios teremos que determinar bases para os espaços próprios $E(-1)$ e $E(1)$ da matriz A_γ para $\gamma = -1$:

$$E(-1) = \mathrm{Nuc}(A_{-1} - (-1)I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\}$$

pelo que $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ é uma base para $E(-1)$;

$$E(1) = \mathrm{Nuc}(A_{-1} - I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -x + z = 0, \ -y + z = 0\},$$

pelo que $\{(1, 1, 1)\}$ é uma base de $E(-1)$. Logo $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A_{-1}.

c) Temos que encontrar a solução geral do sistema cuja matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \gamma & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Conclui-se facilmente que o conjunto solução é $S = \{(x, 0, 1) : \ \gamma x = 0\}$. Note que para $\gamma \neq 0$, $S = \{(0, 0, 1)\}$. Para $\gamma = 0$, $S = \{(x, 0, 1) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Grupo IV

a) Usando o produto interno usual verifique que

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^T v \rangle$$

para qualquer matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e quaisquer vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Suponha agora que $A = A^T$ e sejam u e v vectores próprios de A associados a valores próprios λ e μ, respectivamente, tal que $\lambda \neq \mu$. Então, usando a equação acima, $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$ e o axioma da linearidade do produto interno, obtém-se:

$$\lambda\langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, A^T v \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \mu\langle u, v \rangle$$

pelo que $\lambda\langle u, v \rangle = \mu\langle u, v \rangle$, isto é

$$(\lambda - \mu)\langle u, v \rangle = 0.$$

Se $\langle u, v \rangle \neq 0$ então conclui-se que $\lambda = \mu$ o que é absurdo. Conclusão: $\langle u, v \rangle = 0$, isto é u e v são vectores ortogonais.

b) Como A é uma matriz simétrica então A é diagonalizável. Portanto podemos construir uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A. Em seguida aplica-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a cada base de cada espaço próprio. Finalmente usa-se a alínea a) para garantir que se obtém uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A considerando todas as bases ortogonais dos espaços próprios.