Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (19/JANEIRO/2006)

Cursos: LEC, LEIC-Alameda, LEN e LET Duração: 3h

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:___________________________ **Turma:**_________________
Advertência: há 8 enunciados parecidos....mas distintos.

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
Grupo III (c)		
Grupo IV (a)		
Grupo IV (b)		
TOTAL		

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. Sejam $A_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \\ \gamma & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ onde $\gamma \in \mathbb{C}$ é um parâmetro complexo. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Existe um único valor de γ para o qual $\mathrm{car}(A_\gamma) \neq 3$.
   II) O sistema $A_\gamma x = b$ é determinado para infinitos valores de γ.
   III) O sistema $A_\gamma x = b$ é possível para qualquer valor de γ.
   IV) O sistema homogéneo $A_\gamma x = 0$ é possível para qualquer valor de γ.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II e IV **B)** II e III e IV **C)** I e III e IV **D)** I e II

2. Considere o espaço linear $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas 2×2, munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações:

   I) O conjunto $\{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det(M) = 0\}$ não é um subespaço linear de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   II) O conjunto $\{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \frac{1}{3}M = M^T\}$ é um subespaço linear de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimensão 0.
   III) Existe uma transformação linear $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ injectiva.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II **B)** II **C)** I **D)** III

3. Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y = 0\}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(U) = 2$ e $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ forma uma base de U.

   II) O conjunto $\{(1, 1, 0), (0, 0, 3)\}$ é uma base de U.

   III) $U = \mathrm{Nuc}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   IV) $U = \mathrm{Nuc}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II e IV   **B)** I e III   **C)** I e IV   **D)** II e III

4. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, seja $A = \begin{bmatrix} \beta + 3 & 0 & \beta \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det\left((2A)^2\right) = 4 \det(A)^2$ para qualquer valor de β.

   II) A é invertível para qualquer valor de β.

   III) $\det(A)$ não depende do valor de α.

   IV) O valor $\lambda = 3$ é um valor próprio de A para quaisquer valores de α e β.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e IV   **B)** III e IV   **C)** II e III   **D)** III

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ um produto interno e $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ uma base ortonormada de $\mathbb{R}^4$. Denote por F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores u_1 e u_2. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $||u_1 + u_2 + u_3 + u_4|| = \sqrt{2}$ para algum produto interno.

   II) $||u_1 + u_2 + u_3 + u_4|| = 2$, independentemente do produto interno.

   III) $\dim(F^\perp)$=1.

   IV) $\{u_3, u_4\}$ é uma base ortogonal de $F^\perp$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III   **B)** II e III e IV   **C)** II e IV   **D)** I e IV

6. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação definida como se segue $T(p(x)) = p(x + 1)$.

   I) T não é uma transformação linear.

   II) $p(x) = 1 + x + x^2$ é uma solução da equação linear $T(p(x)) = 3 + 2x + x^2$.

   III) A transformação linear T é bijectiva.

   IV) O polinómio $p(x) = 3$ é um vector próprio de T.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I   **B)** II   **C)** III   **D)** III e IV

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (3 valores)

Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e o espaço linear $E = L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ gerado pelos vectores $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 1, 2)$.

a) Determine bases ortogonais para E e para $E^\perp$.

b) Calcule a distância de $u_0 = (2, 1, 0, 1)$ a $E^\perp$.

Resolução:

GRUPO III (5 valores)

Para cada parâmetro $\gamma \in \mathbb{R}$, seja $T_\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T_\gamma\big((x, y, z)\big) = (\gamma x + 2z, -y + 2z, z).$$

a) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ na qual T_γ é representada pela matriz $A_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Identifique o conjunto dos valores de γ para os quais T_γ é diagonalizável. Para $\gamma = -1$, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T_{-1}.

c) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T_\gamma\big((x, y, z)\big) = (2, 2, 1)$.

Resolução:

GRUPO IV (3 valores)

Considere o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica $A = A^T$.

a) Prove que vectores próprios associados a diferentes valores próprios de A são ortogonais.

b) Prove que existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A.

Resolução: