Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (05/JANEIRO/2006)

Cursos: LEC, LEIC-Alameda, LEN e LET Duração: 3h

Nome do Aluno:____ **Número:**___________

Curso:___________________________ **Turma:**_________________

Advertência: há 8 enunciados parecidos....mas distintos

Teste 2 (1h30m de duração) para alunos da LEIC: problemas

I 4	I 5	I 6	II a	II b	II c	IV b

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (a)		
Grupo II (b)		
Grupo II (c)		
Grupo III (a)		
Grupo III (b)		
Grupo IV (a)		
Grupo IV (b)		
TOTAL		

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1,5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. Seja $\mathcal{S}_\alpha$ o sistema de equações lineares representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & \alpha \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ é um parâmetro complexo. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) Existem infinitos valores de α para os quais o sistema de equações $\mathcal{S}_\alpha$ é possível.

B) Existem exactamente dois valores de α para os quais o sistema $\mathcal{S}_\alpha$ é possível e tem grau de indeterminação 2.

C) Existe exactamente um valor de α para o qual o sistema $\mathcal{S}_\alpha$ é possível.

D) Existe mais do que um valor de α para os quais o sistema $\mathcal{S}_\alpha$ é possível e tem grau de indeterminação 1.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

I) A matriz A é não invertível.

II) A entrada (14) da matriz inversa de A é igual a 0.

III) A matriz $\frac{1}{3}A^2$ é invertível.

A lista completa de afirmações correctas é

A) I **B)** II e III **C)** II **D)** III

3. Para cada k seja $V_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + ky = k^2 - 1, \quad kx + y = 1 - k\}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) O conjunto V_k é um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$ para um único valor de k.

   II) $\dim(V_1) = 1$ e $\{(1,1)\}$ é uma base de V_1 (onde V_1 denota V_k fazendo $k = 1$).

   III) As coordenadas de $v = (a,b)$ na base ordenada $\{(1,1),(1,-1)\}$ são $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** I e III **C)** II e III **D)** III

4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & 1 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det(A) = 3$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 4b & 8 & 16 \end{bmatrix} = -12$.

   II) $b \neq 2a$.

   III) $\det(-3A) = -9$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** II **C)** III **D)** I e II

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, v_1 e v_2 dois vectores próprios associados aos valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) O vector $v_1 + v_2$ também é vector próprio de T.

   II) $\lambda_1 + \lambda_2$ é um valor próprio de T.

   III) A transformação T é diagonalizável.

   IV) T é invertível.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II e IV **C)** I e II e III e IV **D)** III e IV

6. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (x+2y, x-y, x, x-z)$ e $A = M(T; Bc_{\mathbb{R}^3}, Bc_{\mathbb{R}^4})$ a representação matricial de T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   II) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   III) A transformação linear T é sobrejectiva.

   IV) A transformação linear T é injectiva.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e IV **B)** II **C)** I e III **D)** I

Nesta parte, Grupos II, III e IV, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (4 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x,y,z),(a,b,c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A_\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de A_α, em função de α. Justifique que A_α é diagonalizável para cada α.

b) Encontre os valores de α para os quais $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

c) Para os valores de α encontrados na alínea anterior, calcule a distância de $u_0 = (1,1,1)$ a $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y = 0\}$.

Resolução:

GRUPO III (4 valores)

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2, na variável x e $\{1, x, x^2\}$ a sua base canónica. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial nas bases canónicas é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Determine bases para o núcleo e contradomínio de T.

b) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação $T(p(x)) = (1, 4, 7)$.

Resolução:

GRUPO IV (3 valores)

Seja E um espaço Euclidiano real de dimensão finita, F um subespaço de E e $B_F = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ uma base de F. Considere $T : E \to E$ a transformação linear definida como se segue:

$$T(v) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}\, u_i, \qquad v \in E.$$

a) Prove que $\text{Nuc}(T) = F^{\perp}$. Conclua que T é invertível se e só se $F = E$.

b) Seja λ um valor próprio de T. Prove que $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

Resolução: