Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (08/JULHO/2005)

(Semestre Alternativo, Alameda) Duração: 3h

Nome do Aluno:____

Número do Aluno:____

Curso:____ **Turma:**_________________

Advertência: há 8 enunciados parecidos.... mas distintos

preencher por	**Aluno**	**Docente**
Pergunta	Resposta(pág.)	Classificação
Grupo I	1	
Grupo II (1a)		
Grupo II (1b)		
Grupo II (1c)		
Grupo II (1d)		
Grupo II (1e)		
Grupo II (2a)		
Grupo II (2b)		
Grupo III		
TOTAL		

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1.5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	2	3	4	5	6

1. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios, na variável x, de grau menor ou igual a dois munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações:

   I) O conjunto $\{p \in \mathcal{P}_2 : p(0)p(\mathrm{x}) = 2\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_2$.

   II) O conjunto $\{p \in \mathcal{P}_2 : p(\mathrm{x}) = p(0)\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_2$ de dimensão 2.

   III) O conjunto $\{1 + \mathrm{x}, 1 - \mathrm{x} + \mathrm{x}^2, 2 + \mathrm{x}^2\}$ não gera $\mathcal{P}_2$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) III **B)** II **C)** I **D)** II e III

2. Considere E e F os subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$ definidos por: $E = L(\{v_1, v_2\})$ é o espaço gerado pelos vectores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, -1, 1, 1)$ e $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0\}$. Considere ainda a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(E) = 2$ e $\dim(F) = 3$.

   II) $\dim(E + F) = 3$.

   III) $E \subseteq F$.

   IV) $\dim(E \cap F) = 2$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II **B)** I e III **C)** I e II e III e IV **D)** III e IV

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) A matriz A é diagonalizável.

   II) Os vectores $v_1 = (1, -2)$ e $v_2 = (-2, -1)$ são vectores próprios da matriz A.

   III) $A = SDS^{-1}$.

   IV) $D = SAS^{-1}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) III **B)** I e IV **C)** I e II e III **D)** I e II e IV

4. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ uma matriz do tipo 2×2 com entradas nos inteiros $\mathbb{Z}$, $\det(A) = 1$ e $B \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) Existe uma matriz B tal que o sistema $AX = B$ é indeterminado.

   B) A solução de $AX = B$ é $X = BA^{-1}$, porque A é invertível.

   C) $\det(A^k) = k \det(A)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

   D) A matriz inversa de A também tem todas as entradas em $\mathbb{Z}$.

5. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y)$ e $A = M(T; Bc_{\mathbb{R}^3}, Bc_{\mathbb{R}^2})$ a representação matricial de T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   II) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   III) A transformação linear T é sobrejectiva.

   IV) A transformação linear T é injectiva.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e IV **B)** I e III **C)** II e IV **D)** II e III

6. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$, $E = \mathrm{Nuc}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a seguinte lista de afirmações:

   I) A dimensão do complemento ortogonal $E^\perp$ é 2, isto é, $\dim(E^\perp) = 2$.

   II) O conjunto $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ constitui uma base ortogonal de E.

   III) O ângulo entre os vectores $v_1 = (0, 1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 0, 0)$ é de $\pi/4$ radianos (i.e. 45^o).

   IV) O conjunto $\{(0, 1), (1, 0)\}$ constitui uma base para o espaço das colunas $\mathcal{C}_A$ de A.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** II **C)** III **D)** I e II e III e IV

Nesta parte, II 1, II 2 e III, apresente todos os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (9 valores)

Para cada parâmetro real β, seja $A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A_\beta \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

1. a) Prove que a matriz A_β é singular se e só se $\beta \in \{-1, 0, 1\}$.
   b) Determine, em função de β, os valores próprios de A_β.
   c) Diga, justificando, para que valores de β a matriz A_β é diagonalizável.
   d) Para que valores de β a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$?
   e) Para os valores de β encontrados na alínea anterior, calcule $||(0, 1, 0)||$.

Resolução:

2. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios, na variável x, de grau menor ou igual a 2 e $\mathcal{B}c = \{1, \mathrm{x}, \mathrm{x}^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$. Seja $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear tal que a matriz que representa T em $\mathcal{B}c$ é A_1 ($\beta = 1$), onde A_β é a matriz introduzida no início do grupo II.

a) Verifique se $q(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ é um vector próprio de T.

b) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p) = \mathrm{x}$.

Resolução:

GRUPO III (2 valores)

Uma matriz $R \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ diz-se de rotação se $R^{-1} = R^T$ e $\det(R) = 1$, onde R^T denota a matriz transposta de R. Dada uma matriz de rotação $R \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, prove que R fixa um vector $v \in \mathbb{R}^3$ não nulo (i.e., $Rv = v$ para algum $v \neq \mathbf{0}$).

Resolução: