Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (24/JUNHO/2005)

(Semestre Alternativo, Alameda) Duração: 3h

Nome de Aluno:____

Número de Aluno:____

Curso:____ **Turma:**__________________

Advertência: há 8 enunciados parecidos.... mas distintos

preencher por: **Aluno** **Docente**:

Pergunta	Resposta	Classificação
Grupo I		
Grupo II (1a)		
Grupo II (1b)		
Grupo II (1c)		
Grupo II (1d)		
Grupo II (1e)		
Grupo II (2a)		
Grupo II (2b)		
Grupo III		
TOTAL		

GRUPO I (9 valores)

Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1.5**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,5**v.

Respostas do Grupo I (a preencher pelo **Aluno**)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1. Considere o espaço linear $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas 2×2, munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações:

   I) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ injectiva.

   II) O conjunto $\{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M \text{ é invertível}\}$ é um subespaço linear de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   III) O conjunto $\{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M = -M^T\}$ é um subespaço linear de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimensão 1.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III **B)** II **C)** III **D)** I

2. Considere o espaço linear $V = L(\{v_1, v_2\})$ gerado pelos vectores $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$. Considere ainda a base ordenada $B = \{v_1, v_2\}$ de V e a seguinte lista de afirmações:

   I) O vector de coordenadas em relação à base B do vector $v = (4, 4, 1) \in V$ é $(4, 4, 1)$.

   II) O vector de coordenadas em relação à base B do vector $v = (4, 4, 1) \in V$ é $(1, 3)$.

   III) O vector $v \in V$ cujo vector de coordenadas em relação à base B é $v_B = (1, -1)$ é $v = (0, 0, 1)$.

   IV) Os vectores $v_1, v_2, v_1 - v_2$ são linearmente independentes.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e IV **B)** III e IV **C)** II e III **D)** I e II

3. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A = -2$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2a & 1+b \end{bmatrix} = -4$.

   II) 0 não é valor próprio de A.

   III) $\det \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2a & 2 \end{bmatrix} = 4$.

   IV) A é não-singular.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e III e IV **B)** I e II e IV **C)** I e III **D)** II e IV.

4. Seja A uma matriz 2×2 invertível e a seguinte lista de afirmações:

   I) A matriz dos cofactores de A é invertível.

   II) A matriz A não tem duas linhas iguais.

   III) A matriz A não tem nenhum 0 na diagonal principal

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e III **B)** II e III **C)** I e III **D)** I e II

5. Seja $\langle , \rangle$ a aplicação que associa um escalar a cada par de vectores de $\mathbb{R}^2$ definida da seguinte forma:
$$\langle (x, y), (a, b) \rangle = 3xa + xb + ya + yb.$$

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) Esta aplicação define um produto interno em $\mathbb{R}^2$ em que, por exemplo, $||(1, 0)|| = \sqrt{3}$.

   B) Esta aplicação não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, porque existem vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ tais que $\langle u + v, w \rangle \neq \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

   C) Esta aplicação não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, porque existem vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $\langle u, v \rangle \neq \langle v, u \rangle$.

   D) Esta aplicação não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, porque existe um vector $u \in \mathbb{R}^2$ não nulo tal que $\langle u, u \rangle \leq 0$.

6. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e os vectores $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 2, -1)$. Seja $E = L(\{v_1\})$ o espaço gerado por v_1. Considere ainda a seguinte lista de afirmações:

   I) A dimensão do complemento ortogonal $E^\perp$ de E é 1, isto é, $\dim(E^\perp) = 1$.

   II) O conjunto $\{v_1, v_2, v_1 - v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, pois $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

   III) Existe um vector $v \in E^\perp$ não nulo tal que a projecção ortogonal de v sobre E é v, isto é, $P_E(v) = v$ para algum $v \in E^\perp$ não nulo.

   IV) A distância de v_1 a E é 0 e a distância de v_1 a $E^\perp$ é $\sqrt{3}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I e II e III **B)** II e IV **C)** I e III **D)** IV

Nesta parte do exame, II 1, II 2 e III, apresente <u>todos</u> os cálculos e justificações relevantes

GRUPO II (9 valores)

Considere, para cada parâmetro real γ, a matriz A_γ e o vector v_γ definidos por:

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad v_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. a) Determine o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, em função do parâmetro, tal que $A_\gamma v_\gamma = \lambda v_\gamma$.
   b) Discuta as dimensões do $\mathrm{Nuc}(A_\gamma)$ e do espaço $\mathcal{C}_{A_\gamma}$ gerado pelas colunas de A_γ, em função de γ.
   c) Determine, em função de γ, bases para $\mathrm{Nuc}(A_\gamma)$ e $\mathcal{C}_{A_\gamma}$.
   d) Determine, em função de γ, os valores próprios de A_γ.
   e) Identifique os valores de γ para os quais A_γ é diagonalizável.

Resolução:

2. Considere o espaço linear real $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 e a transformação linear $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(X) = \mathrm{tr}(X) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

onde $\mathrm{tr}(X)$ denota o traço da matriz X (i.e., a soma das entradas da diagonal principal de X).

a) Determine γ tal que a matriz que representa T relativamente à base ordenada $\mathcal{B}c$ de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ seja A_γ, onde $\mathcal{B}c = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e A_γ é a matriz introduzida no início do grupo II.

b) Resolva, em $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a equação linear $T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

GRUPO III (2 valores)

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que qualquer vector (não nulo) é vector próprio de T. Denote por $I: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação identidade, i.e. $I(u) = u$ para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$. Prove que então existe um escalar λ tal que $T = \lambda I$.

Resolução: