Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Resumo das Aulas Teóricas de Álgebra Linear

2^o Semestre 2004/2005

(Todos os cursos da Alameda)

Paulo Pinto

Conteúdo

Sistemas de Equações Lineares e Cálculo Matricial

Matrizes

Definição 1. Uma **matriz** A, do tipo $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A **linha** i de A é:

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix},$$

para cada $i = 1, ..., m$. A **coluna** j de A é:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

para cada $j = 1, ..., n$. Usa-se também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$ na qual a_{ij} é a entrada (i, j) da matriz A.

Se $m = n$, diz-se que A é uma **matriz quadrada** do tipo $n \times n$ e as entradas a_{11}, $a_{22}, ...$, a_{nn} formam a chamada **diagonal principal** de A.

Exemplo 1. As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são dos seguintes tipos: A é 2×2, B é 2×4, C é 1×3, A é 4×1. Tem-se, por exemplo, $a_{21} = -2$, $b_{13} = 3$, $c_{12} = 0$ e $d_{41} = 1$.

Observação 1. Uma matriz (real) A do tipo $m \times n$ é uma aplicação:

$$\begin{array}{rcl} A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i, j) & \longrightarrow & a_{ij} \end{array}$$

Notação 1. O conjunto de todas as matrizes reais do tipo $m \times n$ é denotado por $\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Definição 2. Duas matrizes são iguais se forem do mesmo tipo e se as entradas correspondentes forem iguais, isto é, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ são **iguais** se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$, para $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Definição 3. A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é a matriz
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Exemplo 2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Tem-se $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e não é possível somar C com D.

Definição 4. O **produto de um escalar** (número) α **por uma matriz** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é a matriz:
$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}.$$

Notação 2. A matriz $(-1)A$ será denotada por $-A$.

Exemplo 3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. Tem-se, por exemplo,
$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 6 & -4 & -12 \end{bmatrix}.$$

Definição 5. O **produto** AB de duas matrizes A e B só pode ser efectuado se o número de colunas da 1^a matriz, A, fôr igual ao número de linhas da 2^a matriz, B. Nesse caso, o produto AB de $A = (a_{ij})_{m\times p}$ por $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definido por:
$$AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \cdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. Sejam A, B, C e D as matrizes do exemplo 2. Não é possível efectuar, por exemplo, AB. No entanto, tem-se:

$$AC = \begin{bmatrix} -5 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad CD = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -4 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Observação 2. O produto de matrizes não é comutativo. Por exemplo, para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ tem-se } AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo $AB \neq BA$.

Definição 6. A **transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é a matriz

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m}$$

que se obtem trocando as linhas com as colunas de A.

Exemplo 5. Sejam A e C as matrizes do exemplo 2. Tem-se

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C^T = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Teorema 1. Sejam A, B, C e D matrizes de tipos apropriados, α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais.

(a) (Comutatividade da soma) $A + B = B + A$.

(b) (Associatividade da soma) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(c) (Elemento neutro da soma) Existe uma única matriz $\mathbf{0}$ do tipo $m\times n$ tal que $A+\mathbf{0} = A$, para toda a matriz A do tipo $m \times n$. À matriz $\mathbf{0}$, cujas entradas são todas iguais a zero, chama-se **matriz nula**.

(d) (Simétrico) Para cada matriz A existe uma única matriz B tal que $A + B = \mathbf{0}$. Esta matriz B denota-se por $-A$.

(e) (Associatividade do produto por escalares) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$.

(f) (Distributividade) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.

(g) (Distributividade) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$.

(h) (Associatividade do produto de matrizes) $A (BC) = (AB) C$.

(i) (Distributividade) $A (B + C) = AB + AC$ e $(B + C) D = BD + CD$.

(j) $\alpha (AB) = (\alpha A) B = A (\alpha B)$.

(k) $\left(A^T\right)^T = A$.

(l) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

(m) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

(n) $(AB)^T = B^T A^T$.

(o) $(A_1 A_2 ... A_n)^T = A_n^T ... A_2^T A_1^T$, com A_1, A_2, ..., A_n matrizes de tipos apropriados.

(p) À matriz, do tipo $n \times n$,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

chama-se **matriz identidade** (de ordem n) e é tal que

$$AI = A \qquad \text{e} \qquad IB = B,$$

para todas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times m}$.

Definição 7. **(i)** A **diferença** entre duas matrizes A e B do mesmo tipo é definida por

$$A - B = A + (-B),$$

ou seja, é a soma de A com o simétrico de B.

(ii) Sejam A uma matriz do tipo $n \times n$ e $p \in \mathbb{N}$. A **potência** p de A é definida por

$$A^p = \underbrace{A...A}_{p \text{ vezes}} \;\text{ e }\; \text{para } p = 0 \;\text{ define-se }\; A^0 = I.$$

(iii) À matriz do tipo $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

cujas entradas fora da diagonal principal são nulas, chama-se **matriz diagonal**.

Observação 3. Tem-se: $1A = A$, $0A = \mathbf{0}$, $A + A = 2A$, $\underbrace{A + \ldots + A}_{n \text{ vezes}} = nA$.

Definição 8. **(i)** Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz do tipo $n \times n$. Diz-se que A é **simétrica** se $A = A^T$, isto é, se $a_{ij} = a_{ji}$, para $i, j = 1, ..., n$. Diz-se que A é **anti-simétrica** se $A = -A^T$, isto é, se $a_{ij} = -a_{ji}$, para $i, j = 1, ..., n$.

(ii) Para matrizes quadradas $A = (a_{ij})_{n \times n}$ define-se o **traço** de A, $tr(A)$, como sendo a soma de todas as entradas da diagonal principal de A, isto é,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Observação 4. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ duas matrizes do tipo $n \times n$ e α um escalar. Tem-se:
(i) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$,
(ii) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$,
(iii) $tr(A^T) = tr(A)$
(iv) $tr(AB) = tr(BA)$.

Sistemas de Equações Lineares

Definição 9. Uma **equação linear** com n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, ..., a_n$ e b são constantes (reais).

Definição 10. Um **sistema de m equações lineares** com n incógnitas é um conjunto de equações da forma

$$(*) \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes (reais), para $i, k = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Observação 5. Usando o produto de matrizes definido na secção anterior, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$AX = B,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a **matriz dos coeficientes do sistema**, X é a matriz coluna das incógnitas e B é a matriz coluna dos termos independentes. Uma solução do sistema linear $(*)$ é uma matriz

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n.$$

Ao conjunto de todas as soluções do sistema chama-se conjunto solução ou solução geral do sistema.

Exemplo 6. O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução (geral) do sistema acima é $x = -1/3$ e $y = 2/3$ (verifique!), isto é, $X = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

Observação 6. De modo a facilitar a resolução de um sistema linear, este pode ser sempre substituído por outro que tenha o mesmo conjunto solução. Esse outro é obtido depois de aplicar sucessivamente operações sobre as equações do sistema inicial que não alterem a solução do mesmo. As operações são:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação um múltiplo escalar de outra equação.

Estas são as chamadas operações elementares. Quando aplicamos operações elementares às equações de um sistema linear, só os coeficientes e os termos independentes do sistema são alterados. Assim, podemos aplicar as operações à matriz

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \mid & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \mid & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \mid & b_m \end{bmatrix},$$

à qual se dá o nome de **matriz aumentada do sistema**.

Definição 11. As **operações elementares** que podem ser aplicadas às linhas de uma matriz são as seguintes:

(i) Trocar a posição de duas linhas da matriz;

(ii) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;

(iii) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

Teorema 2. Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$ são tais que a matriz aumentada $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ através de uma operação elementar, então os dois sistemas têm o mesmo conjunto solução, isto é, são **equivalentes**.

Observação 7. O método que iremos usar para resolver sistemas lineares consiste na aplicação de operações elementares às linhas da matriz aumentada do sistema de modo a obter uma matriz em escada de linhas em relação à qual o sistema associado seja de fácil resolução.

Definição 12. Uma **matriz** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ diz-se **em escada de linhas** se:

(i) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) estão por baixo das linhas não nulas;

(ii) Por baixo (e na mesma coluna) do primeiro elemento não nulo de cada linha e por baixo dos elementos nulos anteriores da mesma linha, todas as entradas são nulas. Esse primeiro elemento não nulo de cada linha tem o nome de **pivot**.

Definição 13. Seja A uma matriz em escada de linhas. Ao n^o de pivots de A matriz, isto é, ao n^o de linhas não nulas de A, dá-se o nome de **característica de** A, car A. Se A fôr a matriz em escada de linhas obtida de C através de operações elementares então diz-se que a **característica de** C é car A, tendo-se car $C =$ car A. Temos que car$A =$carA^T.

Exemplo 7. As seguintes matrizes estão em escada de linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivot de A: 4. Pivots de B: $1, -5$. Pivots de C: $2, -3, -5$.
car $A = 1$, car $B = 2$ e car $C = 3$,

Definição 14. O método de resolver sistemas lineares que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada do respectivo sistema de modo a que essa matriz fique em escada de linhas, chama-se **método de eliminação de Gauss**[1].

Exemplo 8. O sistema linear

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 6 \\ 3y + 3z = 6 \end{cases}$$

na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

[1] Johann Carl Friedrich Gauss 1777-1855

Consideremos então a matriz aumentada e o consequente método de eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} x+z=3 \\ 2y+z=3 \\ \frac{3}{2}z=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1. \end{cases}$$

Neste exemplo o sistema tem **solução única** e diz-se **possível e determinado**.

Exemplo 9. O sistema linear

$$\begin{cases} 3z-9w=6 \\ 5x+15y-10z+40w=-45 \\ x+3y-z+5w=-7 \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -45 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Consideremos então a matriz aumentada e o consequente método de eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_3 \\ \frac{1}{5}L_2\to L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \underset{3L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} x+3y-z+5w=-7 \\ -z+3w=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y-2w-5 \\ z=3w+2. \end{cases}$$

As incógnitas y e w são livres e as incógnitas x e z são não livres. A solução geral do sistema é:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y-2w-5 \\ y \\ 3w+2 \\ w \end{bmatrix},$$

para quaisquer $y, w \in \mathbb{R}$, isto é, o conjunto solução é dado por:

$$S = \{(-3y - 2w - 5, y, 3w + 2, w) : y, w \in \mathbb{R}\}.$$

Neste exemplo o sistema tem **infinitas soluções** e diz-se **possível e indeterminado**.

Exemplo 10. Seja $a \in \mathbb{R}$. O sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + (a^2 - 5)\, z = a \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}.$$

Consideremos então a matriz aumentada e o consequente método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-6 & a-3 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{bmatrix}.$$

Se $a = 2$, então o sistema é possível e indeterminado:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -y - 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = -2z + 1, \end{cases}$$

a incógnita z é livre, as incógnitas x e y são não livres e a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z + 1 \\ -2z + 1 \\ z \end{bmatrix},$$

para qualquer $z \in \mathbb{R}$, isto é, o conjunto solução é dado por:

$$S = \{(3z + 1, -2z + 1, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, se $a = 2$, o sistema tem **infinitas soluções** e diz-se **possível e indeterminado**.

Se $a = -2$, o sistema **não tem solução** e diz-se **impossível**.

Se $a \neq -2$ e $a \neq 2$, o sistema tem a **solução única**:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+5)/(a+2) \\ a/(a+2) \\ 1/(a+2) \end{bmatrix}$$

e diz-se **possível e determinado**.

Observação 8. Seja $[A \mid B]$ a matriz aumentada associada a um sistema linear com n incógnitas.

(i) Se car $A =$ car $[A \mid B] = n$ então o sistema é **possível e determinado** (tem uma única solução).

(ii) Se car $A =$ car $[A \mid B] < n$ então o sistema é **possível e indeterminado** (tem um n^o infinito de soluções).

(iii) Se car $A <$ car $[A \mid B]$ então o sistema é **impossível** (não tem solução).

(iv) Podemos escolher como **incógnitas livres** (podem tomar valores arbitrários) do sistema aquelas que correspondem às colunas, que não contenham pivots, da matriz em escada de linhas obtida de A através de operações elementares.

(v) As **incógnitas não livres** do sistema são aquelas que correspondem às colunas, que contenham pivots, da matriz em escada de linhas obtida de A através de operações elementares.

(vi) car $A =$ n^o de linhas não nulas da matriz em escada de linhas obtida de $A =$ n^o de pivots $=$ n^o de incógnitas não livres.

Teorema 3. Sejam A uma matriz do tipo $m \times n$ e B uma matriz do tipo $m \times 1$. Se o sistema linear $AX = B$ tem duas soluções distintas X_0 e X_1 ($X_0 \neq X_1$), então terá infinitas soluções.

Dem. Basta verificar que $X_\lambda = (1-\lambda)\, X_0 + \lambda X_1$ é solução do sistema $AX = B$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 15. Um sistema linear da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

tem o nome de **sistema linear homogéneo**. Este sistema poder ser escrito na forma $AX = \mathbf{0}$. Todo o sistema linear homogéneo admite pelo menos a **solução trivial**:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, todo o sistema linear homogéneo tem solução. Além disso, ou tem apenas a solução trivial ou tem infinitas soluções.

Teorema 4. Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é tal que $m < n$, então o sistema linear homogéneo $AX = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.

Dem. Como o sistema tem menos equações do que incógnitas ($m < n$), o n^o de linhas não nulas r da matriz em escada de linhas obtida da matriz aumentada do sistema também é tal que $r < n$. Assim, r pivots e $n - r$ incógnitas livres as quais podem assumir qualquer valor real. Logo, o sistema linear homogéneo $AX = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.

Teorema 5. Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(i) Se X e Y são soluções do sistema $AX = \mathbf{0}$, então $X + Y$ também o é.

(ii) Se X é solução do sistema $AX = \mathbf{0}$, então αX também o é.

(iii) Se X e Y são soluções do sistema $AX = \mathbf{0}$, então $\alpha X + \beta Y$ também o é.

Teorema 6. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ e $B \neq \mathbf{0}$ uma matriz do tipo $m \times 1$. Qualquer solução X do sistema $AX = B$ escreve-se na forma $X = X_0 + Y$ onde X_0 é uma solução particular do sistema $AX = B$ e Y é uma solução do sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$. Assim:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral de} \\ AX = B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{solução particular de} \\ AX = B \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral de} \\ AX = \mathbf{0} \end{array} \right\}.$$

Dem. Sendo X_0 uma solução particular do sistema $AX = B$, basta escrever

$$X = X_0 + (X - X_0)$$

e mostrar que $X - X_0$ é solução do sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$.

Matrizes Elementares

Definição 16. Uma **matriz elementar** do tipo $n \times n$ é uma matriz obtida da matriz identidade I através de uma única operação elementar.

(i) A matriz P_{ij}, chamada **matriz de permutação**, é a matriz elementar obtida por troca da linha i com a linha j da matriz I. Tem-se:

$$P_{ij} = \left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & 1
\end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} .$$

(ii) A matriz $E_i(\alpha)$ é a matriz elementar obtida da matriz I através do produto do escalar $\alpha \neq 0$ pela linha i da matriz I. Tem-se:

$$E_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} .$$

(iii) A matriz $E_{ij}(\alpha)$ é a matriz elementar obtida da matriz I por soma da linha j com um múltiplo α da linha i. Tem-se:

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \alpha & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} .$$

Observação 9. As matrizes elementares $E_{ij}(\alpha)$ são sempre **matrizes triangulares inferiores**, pois todas as entradas por cima das respectivas diagonais principais são nulas.

Exemplo 11. As matrizes elementares do tipo 2×2 são:

$$P_{12} = P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

com $\alpha \neq 0$,

$$E_{12}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{21}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 7. Sejam E uma matriz elementar do tipo $m \times m$ e A uma matriz qualquer do tipo $m \times n$. Então, EA é a matriz obtida de A através da mesma operação elementar que originou E. Isto é, aplicar uma operação elementar a uma matriz corresponde a multiplicar essa matriz à esquerda por uma matriz elementar.

Exemplo 12. Consideremos a matriz aumentada do exemplo 9:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right].$$

A operação elementar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right],$$

corresponde à seguinte multiplicação (à esquerda):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right].$$

A operação elementar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{5}L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right],$$

corresponde à seguinte multiplicação (à esquerda):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right].$$

A operação elementar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \underset{-L_1 + L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right],$$

corresponde à seguinte multiplicação (à esquerda):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right].$$

Finalmente, a operação elementar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \underset{3L_2 + L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

corresponde à seguinte multiplicação (à esquerda):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Tem-se então:

$$E_{23}(3)\, E_{12}(-1)\, E_2\left(\frac{1}{5}\right) P_{13} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A matriz inversa

Definição 17. Uma matriz A (do tipo $n \times n$) diz-se invertível se existir uma matriz B (do tipo $n \times n$) tal que

$$AB = BA = I.$$

À matriz B chama-se **matriz inversa** de A e denota-se por A^{-1}.

Observação 10. Obviamente que resulta da definição de matriz inversa o seguinte facto: sendo A^{-1} a matriz inversa de A, então A^{-1} é invertível e a sua inversa é a própria matriz A, isto é, $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemplo 13. As seguintes matrizes são a inversa uma da outra:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 8. A inversa de uma matriz é única.

Dem. Sejam B e C as inversas de A. Então,

$$B = BI = B\,(AC) = (BA)\,C = IC = C.$$

Teorema 9. **(i)** Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ são duas matrizes invertíveis, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(ii) Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é invertível, então A^T é invertível e

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Definição 18. Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ diz-se **não singular** se após o método de eliminação de Gauss esta fôr transformada numa **matriz triangular superior** (matriz cujas entradas por baixo da diagonal principal são todas nulas) cujas entradas da diagonal principal sejam todas não nulas. Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ diz-se **singular** se após o método de eliminação de Gauss existir (pelo menos) uma linha nula na matriz obtida de A.

Teorema 10. Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é invertível se e só se é não singular.

Teorema 11. Toda a matriz elementar é invertível e a respectiva inversa é também uma matriz elementar. Tem-se:

(i) $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$.

(ii) $(E_i(\alpha))^{-1} = E_i(1/\alpha)$, para $\alpha \neq 0$.

(iii) $(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$.

Teorema 12. (**Factorização triangular).** Seja A uma matriz não singular do tipo $n \times n$. Então ou A admite a factorização única $A = LDU$ ou existe uma matriz de permutação P tal que PA admite a factorização única $PA = LDU$, onde L e U são respectivamente uma matriz triangular inferior e uma matriz triangular superior com as entradas das diagonais principais todas iguais a 1, e D é uma matriz diagonal com as entradas da diagonal principal todas não nulas.

Observação 11. As entradas da diagonal principal da matriz D do teorema 12 são os pivots que resultam da aplicação do método de eliminação de Gauss à matriz A.

Exemplo 14. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. Tem-se:

$$E_{23}(1)E_{13}(-2)E_{12}(-2)A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A = \left(E_{12}(-2)\right)^{-1} \left(E_{13}(-2)\right)^{-1} \left(E_{23}(1)\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$A = E_{12}(2)E_{13}(2)E_{23}(-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$A = LDU,$$

com

$$\begin{aligned} L &= E_{12}(2)E_{13}(2)E_{23}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 15. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Tem-se:

$$P_{24}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{34}\left(-1/2\right) P_{24}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$P_{24}A = \left(E_{34}\left(-1/2\right)\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$P_{24}A = E_{34}\left(1/2\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$PA = LDU,$$

com

$$P = P_{24}, \quad L = E_{34}\left(1/2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 12. Uma matriz A é invertível se e só se fôr igual ao produto de matrizes elementares.

Teorema 13. Seja A uma matriz do tipo $n \times n$.

(i) O sistema associado a $AX = B$ tem solução única se e só se A fôr invertível. Neste caso a solução é $X = A^{-1}B$.

(ii) O sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$ tem solução não trivial se e só se A fôr singular (não invertível).

Teorema 14. Sejam A e B duas matrizes do tipo $n \times n$. Se AB é invertível, então A e B são invertíveis.

Dem. Considere o sistema $(AB)\,X = \mathbf{0}$. Se B não fosse invertível, então pelo teorema 13 existiria $X \neq \mathbf{0}$ tal que $BX = \mathbf{0}$. Logo, $X \neq \mathbf{0}$ seria solução não trivial de $ABX = \mathbf{0}$, o que contraria o teorema 13 uma vez que por hipótese AB é invertível. Assim, B é invertível. Finalmente, A é invertível por ser o produto de duas matrizes invertíveis: $A = (AB)\,B^{-1}$.

Observação 13. (**Como inverter matrizes do tipo** $n \times n$). Seja A uma matriz do tipo $n \times n$ e consideremos a equação $AX = B$. **Se** A **fôr invertível** temos

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B,$$

isto é,

$$AX = IB \Leftrightarrow IX = A^{-1}B.$$

Assim, para determinar a inversa de A, iremos transformar a matriz aumentada $[A \mid I]$ na matriz $[I \mid A^{-1}]$, por meio de operações elementares aplicadas às linhas de $[A \mid I]$. Este método tem o nome de **método de eliminação de Gauss-Jordan**[2] e consistirá na continuação do método de eliminação de Gauss agora aplicado a [matriz triangular superior | $*$], efectuando-se as eliminações de baixo para cima de modo a obter-se $[I \mid A^{-1}]$.

Exemplo 16. **(i)** Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \longrightarrow L_2 \\ -2L_1+L_3 \longrightarrow L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{5}L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_3+L_2 \longrightarrow L_2 \\ -L_3+L_1 \longrightarrow L_1}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 9/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -1 & 0 & -2/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right] \underset{L_2+L_1 \longrightarrow L_1}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/5 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & -1 & 0 & -2/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right] \underset{-L_2 \longrightarrow L_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/5 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right].$$

(ii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \longrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Logo, A é singular e como tal não é invertível.

[2] Wilhelm Jordan 1842 – 1899

Espaços Lineares (Vectoriais)

No final do século XIX e no começo do século XX tornou-se claro – graças a Grassmann[3], Peano[4] e a Weyl[5] – que desenvolvimento axiomático da geometria Euclideana podia ser feita apelando a estruturas matemáticas — Espaços Vectoriais e Euclideanos — que desempanham um papel determinante noutras áreas da matemática e de outras ciências. O estudo das estruturas matemáticas independente quer dos contextos que lhes deram origem quer dos contextos em que aplicam constitui uma das ideias mais ricas da matemática do século XX e é indissociável da matemática Emmy Noether[6]. A Álgebra linear é basicamente o estuda dessas estruturas.

Definição 19. Um conjunto não vazio V é um **espaço linear** (real) se existirem duas operações associadas a V, uma soma de elementos de V e um produto de escalares (números reais) por elementos de V, com as seguintes propriedades:

(a) (Fecho da soma). Para quaisquer $u, v \in V$ tem-se $u + v \in V$.

(b) (Fecho do produto por escalares). Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in V$ tem-se $\alpha u \in V$.

(c) (Comutatividade da soma). Para quaisquer $u, v \in V$, $u + v = v + u$.

(d) (Associatividade da soma). Para quaisquer $u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u + v) + w$.

(e) (Elemento neutro da soma). Existe um elemento de V designado por $\mathbf{0}$ tal que, para qualquer $u \in V$, $u + \mathbf{0} = u$.

(f) (Simétrico). Para cada (qualquer) $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u + v = \mathbf{0}$. A v chama-se o **simétrico** de u e denota-se por $-u$.

(g) (Associatividade do produto por escalares). Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta) u$.

(h) (Distributividade em relação à soma de vectores). Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$, $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

(i) (Distributividade em relação à soma de escalares). Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$.

(j) Para qualquer $u \in V$, $1u = u$.

Observação 14. Aos elementos de V chamaremos vectores.

Exemplo 17. Exemplos de espaços lineares:

[3] Hermann Grassmann 1809–1877
[4] Giuseppe Peano 1858–1932
[5] Hermanm Weyl 1885–1955
[6] Emmy Noether 1882–1935

(i) $\mathbb{R}^n$, com as operações usuais:

$$(u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n),$$

$$\alpha(u_1, u_2, ..., u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n).$$

(ii) $\text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (conjunto de todas as matrizes reais do tipo $m \times n$), com as operações (usuais): $A + B$ e αA.

(iii) O conjunto de todas as funções reais de variável real definidas num conjunto não vazio $S \subseteq \mathbb{R}$, com as operações usuais:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

(iv) O conjunto P de todos os polinómios reais, com as operações usuais.

(v) O conjunto P_n de todos os polinómios reais de grau menor ou igual a n, com as operações usuais.

Observação 15. Um mesmo conjunto pode servir para formar espaços lineares diferentes:

(i) O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, com a soma definida por

$$u \boxplus v = u + v + 1,$$

e o produto por escalares definido por

$$\alpha \cdot u = \alpha u + \alpha - 1,$$

é um espaço linear. (Neste caso o elemento neutro é -1.)

(ii) O conjunto dos números reais maiores do que zero, com a soma definida por

$$u \boxplus v = uv,$$

e o produto por escalares definido por

$$\alpha \cdot u = u^\alpha,$$

é um espaço linear. (Neste caso o elemento neutro é 1.)

Observação 16. Alterações nos conjuntos considerados anteriormente podem resultar em conjuntos que não são espaços lineares.

(i) O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$, com as operações usuais, não é um espaço linear. Por exemplo, os simétricos não estão no conjunto.

(ii) O conjunto $V = \{a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \text{ e } a_n \neq 0\}$, com as operações usuais, não é um espaço linear. Por exemplo:

$$t^n, -t^n + t \in V, \quad \text{mas} \;\; t^n + (-t^n + t) = t \notin V.$$

(iii) O conjunto $U = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f(1) = 2\}$, com as operações usuais, não é um espaço linear. Por exemplo, se $f_1, f_2 \in U$,

$$(f_1 + f_2)(1) = f_1(1) + f_2(1) = 2 + 2 = 4 \neq 2.$$

Logo, $f_1 + f_2 \notin U$.

Subespaços lineares – exemplos: núcleo, espaço colunas e linhas de uma matriz

Definição 20. Seja V um espaço linear. Diz-se que S é um **subespaço** de V se S é um subconjunto de V e se S, com as operações de V, fôr um espaço linear.

Observação 17. No entanto, para mostrar que um certo conjunto $S \subset V$ é um subespaço do espaço linear V, não será necessário verificar as 10 propriedades da definição 19, como se pode ver no seguinte teorema.

Teorema 15. Um subconjunto não vazio S de um espaço linear V é um subespaço de V se e só se:

(i) Para quaisquer $u, v \in S$ tem-se $u + v \in S$.

(ii) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in S$ tem-se $\alpha u \in S$.

Exemplo 18. Exemplos de subespaços:

(i) Os únicos subespaços do espaço linear $\mathbb{R}$, com as operações usuais, são $\{0\}$ e $\mathbb{R}$.

(ii) Os subespaços do espaço linear $\mathbb{R}^3$, com as operações usuais, são: $\{(0,0,0)\}$, $\mathbb{R}^3$, todas as rectas que passam pela origem e todos os planos que passam pela origem.

(iii) O conjunto de todas as matrizes (reais) triangulares superiores (do tipo $n \times n$) é um subespaço do espaço linear $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com as operações usuais.

(iv) O conjunto de todas as funções reais definidas e contínuas em $I \subset \mathbb{R}$ (I é um intervalo) é um subespaço do espaço linear de todas as funções $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, com as operações usuais.

(v) Seja A uma matriz (real) do tipo $m \times n$. O conjunto

$$\mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^m : Au = b \text{ tem pelo menos uma solução } u\}$$

é um subespaço do espaço linear $\mathbb{R}^m$, com as operações usuais, ao qual se dá o nome de **espaço das colunas** de A.

(vi) Seja A uma matriz (real) do tipo $m \times n$. O conjunto

$$\text{Nuc}(A) = \{u \in \mathbb{R}^n : Au = \mathbf{0}\}$$

é um subespaço do espaço linear $\mathbb{R}^n$, com as operações usuais, ao qual se dá o nome de **espaço nulo ou núcleo** de A.

Observação 18. **(i)** Se A é invertível então $\text{Nuc}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) Se $\text{Nuc}(A) = \{\mathbf{0}\}$ então A é invertível.

(iii) Poderemos obter subespaços de um espaço linear através de combinações lineares de vectores desse espaço.

Definição 21. Seja S um subconjunto não vazio de um espaço linear V. Diz-se que um vector u é **combinação linear** finita dos elementos de S, se existir um n^o finito de elementos de S, $u_1, ..., u_k$, e de escalares $\lambda_1, ..., \lambda_k$ tais que

$$u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_k u_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i.$$

Ao cojunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de S chama-se **expansão linear** de S e designa-se por $L(S)$. Se S é o conjunto vazio $\varnothing$, escreve-se $L(\varnothing) = \{0\}$.

Teorema 16. Seja S um subconjunto não vazio de um espaço linear V. A expansão linear $L(S)$ de S é o menor subespaço de V que contém S. Deste modo, a $L(S)$ também se chama o **subespaço gerado** por S, e diz-se que S **gera** $L(S)$.

Observação 19. Seja S e T dois subconjuntos não vazios de um espaço linear V, com $S \subset T$. Se $L(S) = V$ então $L(T) = V$.

Exemplo 19. **(i)** O espaço linear $\mathbb{R}^2$ é gerado por qualquer dos seguintes conjuntos de vectores:

$$\{(1,0),(0,1)\}, \quad \{(1,2),(-1,11)\} \quad \text{e} \quad \{(23,8),(6,14)\}.$$

(ii) O subespaço $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ do espaço linear $\mathbb{R}^2$ é gerado por qualquer dos seguintes conjuntos de vectores:

$$\{(1,2)\}, \quad \{(-2,-4)\} \quad \text{e} \quad \{(77,154)\}.$$

(iii) O espaço linear P_n de todos os polinómios de grau menor ou igual a n, é gerado por qualquer dos seguintes conjuntos de vectores:

$$\{1, t, t^2, ..., t^n\}, \quad \{1, 1+t, (1+t)^2, ..., (1+t)^n\} \quad \text{e} \quad \{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, ..., \frac{t^n}{n!}\}.$$

(iv) O espaço linear P de todos os polinómios, é gerado pelo conjunto infinito de vectores:

$$\{1, t, t^2, ...\}.$$

(v) O espaço linear V de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis tais que $f'(x) = af(x)$ é gerado pela função $f_1(x) = e^{ax}$, i.e. $V = L(\{f_1\})$.

(vi) Seja A uma matriz (real) do tipo $m \times n$. O espaço das colunas de A,

$$\mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^m : Au = b \text{ tem pelo menos uma solução } u\},$$

é o subespaço (do espaço linear $\mathbb{R}^m$) gerado pelas colunas de A, uma vez que:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + u_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(vii) Seja A uma matriz (real) do tipo $m \times n$. Ao subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A dá-se o nome de **espaço das linhas** de A e designa-se por $\mathcal{L}(A)$.

(viii) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = \{(0,0)\}, \quad \operatorname{Nuc}(A) = \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = \{(0,0,0)\}.$$

$$\mathcal{C}(B) = L\left(\{(1,0,0), (1,7,0)\}\right), \ \operatorname{Nuc}(B) = L\left(\{(3,1,0)\}\right) \ \text{ e } \ \mathcal{L}(B) = L\left(\{(1,-3,1), (0,0,7)\}\right).$$

$$\mathcal{C}(C) = L\left(\{(-1,2,-2)\}\right), \ \operatorname{Nuc}(C) = L\left(\{(2,1)\}\right) \ \text{ e } \ \mathcal{L}(C) = L\left(\{(-1,2)\}\right).$$

$$\mathcal{C}(D) = L\left(\{(2,0), (0,-1)\}\right), \ \operatorname{Nuc}(D) = \{(0,0)\} \ \text{ e } \ \mathcal{L}(D) = L\left(\{(2,0), (0,-1)\}\right).$$

(ix) Seja $U = \{A \in \text{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a_{12} = a_{21} = a_{32} = 0 \ \text{ e } \ a_{11} + 2a_{31} = 0\}$. Tem-se, para $A \in U$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_{31} & 0 \\ 0 & a_{22} \\ a_{31} & 0 \end{bmatrix} = a_{31} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $a_{31}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

(x) Seja $U = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : p(1) = p(0)\}$. Tem-se, para $p(t) \in U$,

$$p(1) = p(0) \Longleftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = a_0 \Longleftrightarrow a_1 + a_2 = 0 \Longleftrightarrow a_1 = -a_2.$$

Logo,

$$p(t) = a_0 - a_2 t + a_2 t^2 = a_0 1 + a_2 \left(-t + t^2\right),$$

com $a_0, a_2 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$U = L\left(\left\{1, -t + t^2\right\}\right).$$

Teorema 17. Se U e V são subespaços do espaço linear W, então:

(i) O conjunto $U \cap V$ é um subespaço linear de W.

(ii) O conjunto $U + V = \{u + v : u \in U \quad \text{e} \quad v \in V\}$ é um subespaço de W. É o menor subespaço de W que contém $U \cup V$. O conjunto $U \cup V$ em geral não é um subespaço. Tem-se $U + V = L(U \cup V)$.

Exemplo 20. (i) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\} \quad \text{e} \quad V = L\left(\{(1, 1, -1), (1, 2, 1)\}\right).$$

Seja $v \in V$, então

$$v = \alpha(1, 1, -1) + \beta(1, 2, 1) = (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, -\alpha + \beta),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para que v esteja também em U é preciso que:

$$(\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) - 2(-\alpha + \beta) = 0.$$

A última equação é equivalente a $4\alpha + \beta = 0 \Longleftrightarrow \beta = -4\alpha$. Logo,

$$U \cap V = \{(-3\alpha, -7\alpha, -5\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-3, -7, -5) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(3, 7, 5)\}\right).$$

(ii) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(1, -1, 1), (1, 2, 2)\}\right) \quad \text{e} \quad V = L\left(\{(2, 1, 1), (-1, 1, 3)\}\right).$$

Seja $v \in U$, então

$$v = \alpha(1, -1, 1) + \beta(1, 2, 2) = (\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta, \alpha + 2\beta),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para que v esteja também em V é preciso que:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta, \alpha + 2\beta) &= \lambda(2, 1, 1) + \mu(-1, 1, 3) = \\ &= (2\lambda - \mu, \lambda + \mu, \lambda + 3\mu),\end{aligned}$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Deste modo,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\lambda - \mu \\ \\ -\alpha + 2\beta = \lambda + \mu \\ \\ \alpha + 2\beta = \lambda + 3\mu. \end{cases}$$

Considerando a matriz aumentada tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\lambda-\mu \\ -1 & 2 & \lambda+\mu \\ 1 & 2 & \lambda+3\mu \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\lambda-\mu \\ 0 & 3 & 3\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda+4\mu \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\lambda-\mu \\ 0 & 3 & 3\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda+4\mu \end{array}\right]$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2\lambda-\mu \\ \\ \beta=\lambda \\ \\ 0=-2\lambda+4\mu. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=\mu \\ \\ \beta=2\mu \\ \\ \lambda=2\mu. \end{cases}$$

Assim,

$$\alpha(1,-1,1)+\beta(1,2,2)=\mu(1,-1,1)+2\mu(1,2,2)=(3\mu,3\mu,5\mu)=\mu(3,3,5).$$

Logo,

$$U\cap V=\{(3\mu,3\mu,5\mu):\mu\in\mathbb{R}\}=\{\mu(3,3,5):\mu\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(3,3,5)\}\right).$$

Observação 20. Neste exemplo (ii), os subespaços U e V poderiam ter sido apresentados inicialmente na forma:

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:4x+y-3z=0\} \quad \text{e} \quad V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x-7y+3z=0\},$$

uma vez que

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:4x+y-3z=0\}=L\left(\{(1,-4,0),(0,3,1)\}\right)=L\left(\{(1,-1,1),(1,2,2)\}\right)$$

e

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x-7y+3z=0\}=L\left(\{(7,2,0),(-3,0,2)\}\right)=L\left(\{(2,1,1),(-1,1,3)\}\right).$$

(iii) Sejam $W=\text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, U o subespaço (de W) das matrizes triangulares superiores, V o subespaço (de W) das matrizes triangulares inferiores. Então

$$U+V=W \qquad \text{e} \qquad U\cap V= \text{ subespaço das matrizes diagonais.}$$

(iv) Sejam $W=\mathbb{R}^2$, $U=L(\{(1,0)\})$ e $V=L(\{(0,1)\})$. O conjunto

$$U\cup V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=0\vee y=0\}$$

não é um espaço linear:

$$\underbrace{(1,0)}_{\in U}+\underbrace{(0,1)}_{\in V}=(1,1)\notin U\cup V$$

Teorema 18. Se U e V subespaços do espaço linear W, então $U\cup V$ é subespaço de W se e só se $U\subset V$ ou $V\subset U$.

Teorema 19. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço linear V tais que

$$W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}.$$

Se $V = W_1 + W_2$ então todo o vector $v \in V$ pode ser escrito de modo único na forma

$$v = w_1 + w_2$$

com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Neste caso escreve-se $V = W_1 \oplus W_2$ e diz-se que V é a **soma directa** dos espaços W_1 e W_2.

Teorema 20. O espaço das linhas $\mathcal{L}(A)$ e o núcleo $\mathrm{Nuc}(A)$ de uma matriz $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mantêm-se invariantes por aplicação do método de eliminação de Gauss. Isto é, sendo A' a matriz em escada que se obtem de A por aplicação desse método, tem-se

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A') \ \text{ e } \ \mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(A').$$

Observação 21. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se A' fôr a matriz em escada que se obtem de A por aplicação do método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(A').$$

Teorema 21. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T) \ \text{ e } \ \mathcal{L}(A) \cap \mathrm{Nuc}(A) = \{\mathbf{0}\}.$$

Independencia linear

Definição 22. Seja V um espaço linear. Seja $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V$. Diz-se que o conjunto S é **linearmente dependente** se e só se algum dos vectores de S se escrever como combinação linear dos restantes, isto é, se e só se existir algum $i \in \{1, 2, ..., k\}$ e escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + ... + \lambda_k v_k.$$

Definição 23. Seja V um espaço linear. Seja $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V$. Diz-se que o conjunto S é **linearmente independente** se e só se nenhum dos vectores de S se puder escrever como combinação linear dos restantes, isto é, se e só a única solução do sistema homogéneo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$$

fôr a solução trivial, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$. Isto é, sendo A a matriz cujas colunas são os vectores de S, diz-se que S é **linearmente independente** se e só se $\mathrm{Nuc}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Teorema 22. Seja A' uma matriz em escada de linhas.

(i) As colunas de A' que contêm pivots são linearmente independentes.

(ii) As linhas não nulas de A' são linearmente independentes.

(iii) O n^o de linhas independentes e o n^o de colunas independentes (de A') são ambos iguais à característica de A'.

Observação 22. **(i)** Assim, atendendo ao teorema anterior, a independência linear de $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V$ (espaço linear) pode ser decidida aplicando o método de eliminação à matriz A cujas colunas são os vectores de S, de modo a colocá-la em escada de linhas. Sendo A' essa matriz em escada, tem-se pelo teorema 20

$$\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(A') \quad (*).$$

Uma vez que as colunas de A' que contêm pivots são linearmente independentes então, devido a (*), as colunas de A nas posições correspondentes também serão linearmente independentes.

(ii) Em $\mathbb{R}$, quaisquer dois vectores são linearmente dependentes.

(iii) Em $\mathbb{R}^2$, dois vectores são linearmente independentes se não forem colineares.

(iv) Em $\mathbb{R}^3$, três vectores são linearmente independentes se não forem coplanares.

(v) Qualquer conjunto que contenha o vector nulo (elemento neutro) é linearmente dependente. Em particular, o conjunto $\{\mathbf{0}\}$, formado apenas pelo vector nulo, é linearmente dependente.

(vi) O conjunto vazio $\varnothing$ é linearmente independente.

Teorema 23. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos finitos de um espaço linear, tais que $S_1 \subset S_2$.

(i) Se S_1 é linearmente dependente então S_2 também é linearmente dependente.

(ii) Se S_2 é linearmente independente então S_1 também é linearmente independente.

Observação 23. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos finitos de um espaço linear, tais que $S_1 \subset S_2$.

(i) Se S_2 fôr linearmente dependente então S_1 tanto pode ser linearmente dependente como linearmente independente.

(ii) Se S_1 fôr linearmente independente então S_2 tanto pode ser linearmente dependente como linearmente independente.

Exemplo 21. Seja $S = \{(1,0,2),(2,0,4),(0,1,2)\}$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{-2L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

Logo, como apenas existem dois pivots e portanto uma variável livre, as três colunas de A são linearmente dependentes, isto é, o conjunto S é linearmente dependente. O subconjunto de S:

$$\{(1,0,2),(2,0,4)\}$$

também é linearmente dependente. No entanto, uma vez que a 1^a e 3^a colunas de A são independentes pois correspondem às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, o subconjunto de S:

$$\{(1,0,2),(0,1,2)\}$$

é linearmente independente.

Bases e dimensão de Espaços Lineares

Definição 24. Chama-se **base** de um espaço linear V a qualquer subconjunto $\mathcal{S}$ de V que verifique as duas condições:

(i) $\mathcal{S}$ gera V, isto é, $L(\mathcal{S}) = V$.

(ii) $\mathcal{S}$ é linearmente independente.

Teorema 24. Qualquer espaço linear $V \neq \{\mathbf{0}\}$ tem pelo menos uma base.
Dem.: Demonstração não trivial!!

Observação 24. Qualquer espaço linear $V \neq \{\mathbf{0}\}$ tem um n^o infinito de bases. Por exemplo, se $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_k\}$ fôr uma base de V então para cada $\alpha \neq 0$ o conjunto $\{\alpha u_1, ..., \alpha u_k\}$ é também uma base de V.

Teorema 25. Todas as bases de um espaço linear $V \neq \{\mathbf{0}\}$ têm o mesmo n^o de vectores.

Definição 25. Chama-se **dimensão** de um espaço linear $V \neq \{\mathbf{0}\}$ ao n^o de vectores de uma base qualquer de V, e escreve-se $\dim V$. Se $V = \{\mathbf{0}\}$ então $\dim V = 0$ uma vez que o conjunto vazio $\varnothing$ é base de $\{\mathbf{0}\}$. Um espaço linear terá dimensão finita se uma sua base tiver um n^o finito de vectores.

Exemplo 22. **(i)** O conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathbb{R}$, chamada base canónica ou natural de $\mathbb{R}$. Logo,
$$\dim \mathbb{R} = 1.$$

(ii) O conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, chamada base canónica ou natural de $\mathbb{R}^2$. Logo,
$$\dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

(iii) O conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, chamada base canónica ou natural de $\mathbb{R}^3$. Logo,
$$\dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

(iv) O conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, chamada base canónica ou natural de $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Logo,

$$\dim \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6.$$

(v) Tem-se
$$\dim \mathbb{R}^n = n \quad \text{e} \quad \dim \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn.$$

(vi) O conjunto $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$ é uma base de P_n (espaço linear de todos os polinómios reais de grau menor ou igual a n), chamada base canónica ou natural de P_n. Logo,

$$\dim P_n = n + 1.$$

(vii) O conjunto $\{1, t, t^2, ...\}$ é uma base de P (espaço linear de todos os polinómios reais), chamada base canónica ou natural de P. Logo,

$$\dim P = \infty.$$

Definição 26. Chama-se **nulidade** à dimensão do núcleo ou espaço nulo de uma matriz A e escreve-se $\operatorname{nul} A$.

Teorema 26. Seja $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(i) Tem-se

$$\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = \operatorname{car} A.$$

(ii) Tem-se

$$\operatorname{car} A + \operatorname{nul} A = n.$$

Teorema 27. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços de dimensão finita de um espaço linear V. Então,

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2).$$

Teorema 28. Sejam V um espaço linear de dimensão finita e W um subespaço de V.

(i) Seja $S = \{u_1, ..., u_k\} \subset V$. Se S é linearmente independente então S será um subconjunto de uma base de V e ter-se-á $\dim V \geq k$.

(ii) Se $\dim V = n$, então quaisquer m vectores de V, com $m > n$, são linearmente dependentes.

(iii) Se $\dim V = n$, então nenhum conjunto com m vectores de V, em que $m < n$, pode gerar V.

(iv) O subespaço W tem dimensão finita e $\dim W \leq \dim V$.

(v) Se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.

(vi) Se $\dim V = n$, então quaisquer n vectores de V linearmente independentes constituem uma base de V.

(vii) Se $\dim V = n$, então quaisquer n vectores geradores de V constituem uma base de V.

Observação 25. O n^o de elementos de uma base de um espaço linear é igual ao n^o mínimo de vectores possam constituir um conjunto gerador desse espaço e é também igual ao n^o máximo de vectores que possam constituir um conjunto linearmente independente nesse espaço.

Exemplo 23. Seja $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{L}(A)$ e $\operatorname{Nuc}(A)$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$ então

$$\mathcal{L}(A) + \operatorname{Nuc}(A) = L\left(\mathcal{L}(A) \cup \operatorname{Nuc}(A)\right)$$

é também um subepaço de $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, atendendo a que

$$\mathcal{L}(A) \cap \mathrm{Nuc}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

(teorema 21), tem-se

$$\dim\left(\mathcal{L}(A) \cap \mathrm{Nuc}(A)\right) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim\left(\mathcal{L}(A) + \mathrm{Nuc}(A)\right) &= \dim \mathcal{L}(A) + \dim \mathrm{Nuc}(A) - \dim\left(\mathcal{L}(A) \cap \mathrm{Nuc}(A)\right) = \\ &= \mathrm{car}\, A + \mathrm{nul}\, A - 0 = \\ &= n. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 28 (v), tem-se

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{L}(A) \oplus \mathrm{Nuc}(A).$$

Exemplo 24. **(i)** Os seguintes conjuntos são **todos** os subespaços de $\mathbb{R}$:

$$\{0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}.$$

(ii) Os seguintes conjuntos são **todos** os subespaços de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(0,0)\}\,, \text{ todas as rectas que contêm a origem } \text{ e } \mathbb{R}^2.$$

(iii) Os seguintes conjuntos são **todos** os subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$\{(0,0,0)\}$, todas as rectas que contêm a origem, todos os planos que contêm a origem e $\mathbb{R}^3$.

Observação 26. O método de eliminação de Gauss permite determinar a dimensão e uma base quer para o espaço das linhas $\mathcal{L}(A)$ quer para o espaço das colunas $\mathcal{C}(A)$ de uma matriz A. Seja A' a matriz em escada que se obtem de A por aplicação do método de eliminação de Gauss. Então,

(i) Uma base para $\mathcal{L}(A)$ será formada pelas linhas não nulas de A'.

(ii) Uma base para $\mathcal{C}(A)$ será formada pelas colunas de A que correspondem às posições das colunas de A' que contêm os pivots.

Exemplo 25. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ 3L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{-4L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

Logo, $\{(2,1,1,1),(0,0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$ e $\{(2,4,-6),(1,3,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Assim,

$$\dim \mathcal{L}(A) = 2 = \dim \mathcal{C}(A)$$

e

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(2,1,1,1),(0,0,1,1)\}\right), \;\; \mathcal{C}(A) = L\left(\{(2,4,-6),(1,3,1)\}\right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nuc}(A') &= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : A' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \{(x,-2x,-w,w) : x,w \in \mathbb{R}\} = \\
&= L\{(1,-2,0,0),(0,0,-1,1)\}.
\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,-2,0,0),(0,0,-1,1)\}$ é linearmente independente e gera $\mathrm{Nuc}(A')$ então é uma base de $\mathrm{Nuc}(A')$. Finalmente, uma vez que $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(A')$, o conjunto

$$\{(1,-2,0,0),(0,0,-1,1)\}$$

é uma base de $\mathrm{Nuc}(A)$ e portanto $\dim \mathrm{Nuc}(A) = 2$, com

$$\mathrm{Nuc}(A) = L\{(1,-2,0,0),(0,0,-1,1)\}.$$

Exemplo 26. Seja $S = \{1,2,-1),(2,1,1),(-1,-2,1),(0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Determinemos uma base para $L(S)$.

Considere a seguinte matriz cujas colunas são os vectores de S:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $S' = \{1,2,-1),(2,1,1),(0,1,0)\}$ é uma base de $L(S)$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então tem-se mesmo: $L(S) = \mathbb{R}^3$ e S' é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Considere a seguinte matriz cujas linhas são os vectores de S:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{3}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $S' = \{1, 2, -1), (0, -3, 3), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $L(S)$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então tem-se mesmo: $L(S) = \mathbb{R}^3$ e S' é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 27. Seja $S_{a,b} = \{1, 0, 1), (0, 1, a), (1, 1, b), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Determinemos os valores dos parâmetros a e b para os quais $S_{a,b}$ não gere $\mathbb{R}^3$.

Considere a seguinte matriz cujas colunas são os vectores de S:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b-1 & 0 \end{bmatrix} \underset{-aL_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-a-1 & -a \end{bmatrix}.$$

Logo, $S_{a,b}$ não gera $\mathbb{R}^3$ se e só se $b - a - 1 = 0$ e $-a = 0$, isto é, se e só se $a = 0$ e $b = 1$.

Teorema 29. **(i)** Seja $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. As colunas de A geram $\mathbb{R}^m$ se e só se $\mathrm{car}\, A = m$.

(ii) Seja $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. As colunas de A são linearmente independentes se e só se $\mathrm{car}\, A = n$.

(iii) Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A matriz A é invertível se e só se as colunas de A (ou as linhas de A) formarem uma base de $\mathbb{R}^n$. No caso de A ser invertível tem-se

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^n.$$

Observação 27. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e considere o sistema de equações lineares $Au = b$.

(i) O sistema $Au = b$ é **impossível** (não tem solução) se e só se $b \notin \mathcal{C}(A)$, isto é, se e só se $\mathrm{car}\, A < \mathrm{car}\, [A \mid b]$.

(ii) O sistema $Au = b$ é **possível e indeterminado** (tem um n^o infinito de soluções) se e só se $b \in \mathcal{C}(A)$ e as colunas de A forem linearmente dependentes, isto é, se e só se $\mathrm{car}\, A = \mathrm{car}\, [A \mid b] < n$, isto é, se e só se $\mathrm{car}\, A = \mathrm{car}\, [A \mid b]$ e $\mathrm{nul}\, A \neq 0$.

(iii) O sistema $Au = b$ é **possível e determinado** (tem uma única solução) se e só se $b \in \mathcal{C}(A)$ e as colunas de A forem linearmente independentes, isto é, se e só se $\mathrm{car}\, A = \mathrm{car}\, [A \mid b] = n$, isto é, se e só se $\mathrm{car}\, A = \mathrm{car}\, [A \mid b]$ e $\mathrm{nul}\, A = 0$.

Observação 28. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e considere o sistema de equações lineares $Au = b$.

(i) Existência de solução: Se $m \leq n$ então o sistema $Au = b$ tem pelo menos uma solução u para cada $b \in \mathbb{R}^m$ se e só se $\operatorname{car} A = m$.

(ii) Unicidade de solução: Se $m \geq n$ então o sistema $Au = b$ tem no máximo uma solução u para cada $b \in \mathbb{R}^m$ se e só se $\operatorname{car} A = n$, isto é, se e só se $\operatorname{nul} A = 0$.

(iii) Existência e unicidade de solução: Se $m = n$ então o sistema $Au = b$ tem solução única u para cada $b \in \mathbb{R}^m$ se e só se A fôr invertível.

Teorema 30. Seja $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é não singular.

(ii) A é invertível.

(iii) $\operatorname{Nuc}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(iv) $\operatorname{nul} A = 0$.

(v) $Au = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial $u = \mathbf{0}$.

(vi) $Au = b$ tem solução única u para cada $b \in \mathbb{R}^n$.

(vii) A característica de A é máxima, isto é, $\operatorname{car} A = n$.

(viii) As colunas de A geram $\mathbb{R}^n$.

(ix) As colunas de A são independentes.

(x) As linhas de A geram $\mathbb{R}^n$.

(xi) As linhas de A são independentes.

(xii) A menos de permutações de linhas, a matriz A admite uma única factorização triangular LDU.

Matriz mudança de base

Definição 27. Seja $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ uma base ordenada de um espaço linear V e seja u um vector de V. Chamam-se **coordenadas** do vector u na base ordenada $\mathcal{S}$ aos escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ da combinação linear:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k.$$

Teorema 31. Seja V um espaço linear.

(i) Um conjunto $\mathcal{S}$ de vectores não nulos de V é uma base de V se e só se todo o vector de V puder ser escrito de modo único como combinação linear dos vectores de $\mathcal{S}$.

(ii) Se $\dim V = n$, então dados $u, w \in V$ e $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V, tem-se $u = w$ se e só se as coordenadas de u e de w na base $\mathcal{S}$ forem iguais.

Teorema 32. Seja V um espaço linear de dimensão n. Sejam $\mathcal{S}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ duas bases ordenadas de V. Seja $S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2}$ a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vectores de $\mathcal{S}_1$ em relação à base $\mathcal{S}_2$. Isto é,

$$S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2} = (s_{ij})_{n \times n} \quad \text{com} \quad v_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} w_i \quad \text{para todo o } j = 1, ..., n.$$

A matriz $S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2}$ é não singular e chama-se **matriz de mudança de base** (da base $\mathcal{S}_1$ para $\mathcal{S}_2$). Assim, se tivermos

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,$$

isto é, se $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ forem as coordenadas do vector u na base $\mathcal{S}_1$ então as coordenadas $(\mu_1, ..., \mu_n)$ de u na base $\mathcal{S}_2$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dem. Tem-se

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} s_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \lambda_j \right) w_i.$$

Atendendo ao teorema 31 (i), as coordenadas de um vector u numa base são únicas. Logo,

$$\mu_i = \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \lambda_j \right),$$

para todo o $i = 1, ..., n$. Isto é,

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Observação 29. Tem-se

$$S_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1} = \left(S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2} \right)^{-1}.$$

Exemplo 28. Seja $\mathcal{B}_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$. Seja $\mathcal{B} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ uma outra base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Sejam $(2, 3)$ as coordenadas de um vector u na base canónica $\mathcal{B}_c$ e determinemos as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ usando a matriz de mudança de base $S_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}$. Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$(1,0) = -\frac{1}{3}(1,2) + \frac{2}{3}(2,1) \quad \text{e} \quad (0,1) = \frac{2}{3}(1,2) - \frac{1}{3}(2,1).$$

Logo, as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Logo, $4/3$ e $1/3$ são as coordenadas de $(2,3)$ na base ordenada $\mathcal{B}$, isto é

$$(2,3) = \frac{4}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(2,1).$$

Transformações Lineares

Definição 28. Sejam U e V espaços lineares. Diz-se que

$$T : U \to V$$

é uma **transformação linear** se e só se verificar as duas condições:

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para todos os $u, v \in U$.
(ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todos os $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 30. Sejam U e V espaços lineares. Sejam $\mathbf{0}$ o vector nulo de U e $\mathbf{0}'$ o vector nulo de V.

(i) Se $T : U \to V$ fôr uma transformação linear então $T(U)$ é um subespaço de V e além disso tem-se $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$. Logo, se T não verificar $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$ então T não será uma transformação linear.

(ii) $T : U \to V$ é uma transformação linear se e só se

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v),$$

para todos os $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $u, v \in U$.

(iii) Seja $T : U \to V$ uma transformação linear e seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de U. Seja $u \in U$. Logo, existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$$

Tem-se então

$$T(u) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + ... + \lambda_n T(v_n).$$

Exemplo 29. Consideremos a base canónica $\{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma transformação linear tal que $T(1,0) = 1$ e $T(0,1) = 1$.

Para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Então,

$$T(x, y) = T\left(x(1, 0) + y(0, 1)\right) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x + y.$$

Logo, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a transformação linear definida explicitamente por

$$T(x, y) = x + y.$$

Teorema 33. Sejam U e V espaços lineares e seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de U. Sejam $T_1, T_2 : U \to V$ duas transformações lineares.

$$\text{Se } T_1(v_i) = T_2(v_i) \text{ para todo o } i = 1, \ldots, n, \text{ então } T_1(u) = T_2(u),$$

para todo o $u \in U$, isto é, $T_1 = T_2$.

Exemplo 30. Sejam U e V espaços lineares e seja $\mathbf{0}$ o vector nulo de V.

(i) Seja $O : U \to V$ definida por

$$O(u) = \mathbf{0},$$

para todo o $u \in U$. O é uma transformação linear e chama-se **transformação nula**.

(ii) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja $T_\lambda : U \to U$ definida por

$$T_\lambda(u) = \lambda u,$$

para todo o $u \in U$. T_λ é uma transformação linear. Se $\lambda = 1$ então chama-se a T_1 a **transformação identidade** e denota-se por I. Tem-se $I(u) = u$, para todo o $u \in U$.

(iii) Seja

$$\operatorname{tr} : \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

para todo o $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. tr (traço) é uma transformação linear.

(iv) Seja $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Seja

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definida por

$$T(u) = Au,$$

para todo o $u \in \mathbb{R}^n$. T é uma transformação linear.

(v) Seja E o espaço das funções diferenciáveis. Então $T : E \to E$ definida por

$$T(f) = f'$$

é uma transformação linear.

Representação matricial de uma transformação linear

Teorema 34. Sejam U e V espaços lineares de dimensões finitas tais que $\dim U = n$ e $\dim V = m$. Sejam $\mathcal{S}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ duas bases ordenadas de U e V respectivamente. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Considere-se a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ cuja coluna j, para cada $j = 1, ..., n$, é formada pelas coordenadas de $T(u_j)$ na base $\mathcal{S}_2$. Isto é,

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i.$$

Chama-se a esta matriz A a **representação matricial** de T em relação às bases $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ e escreve-se

$$A = M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2).$$

Além disso, sendo $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ as coordenadas de um vector $v \in U$ na base ordenada $\mathcal{S}_1$ então as coordenadas $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ de $T(v) \in V$ na base ordenada $\mathcal{S}_2$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Observação 31. (a) Seja V um espaço linear de dimensão finita, com $\dim V = n$. Sejam $\mathcal{S}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ duas bases ordenadas de V. A representação matricial da transformação identidade $I : V \to V$ em relação às bases $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ é igual à matriz de mudança da base $\mathcal{S}_1$ para $\mathcal{S}_2$. Isto é,

$$M(I; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2) = S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2}.$$

(b) Quando a base de partida e chegada coincidem $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$, denota-se $M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$ somplesmente por $M(T; \mathcal{S}_1)$.

Teorema 35. Sejam $\mathcal{B}_c^n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e $\mathcal{B}_c^m = \{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$ as bases canónicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Considere-se a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n} = M(T; \mathcal{B}_c^n; \mathcal{B}_c^m) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ cuja coluna j, para cada $j = 1, ..., n$, é formada pelas coordenadas de $T(e_j)$ na base $\mathcal{B}_c^m$. Isto é,

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i' = a_{1j} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + ... + a_{mj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Então, tem-se, para todo o $u \in \mathbb{R}^n$,

$$T(u) = Au.$$

Dem. Seja $u \in \mathbb{R}^n$. Então, existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$$

Uma vez que, para todo o $j = 1, ..., n$,

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i,$$

tem-se

$$\begin{aligned} T(u) &= T\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) \underset{\text{T é linear}}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j\right) e'_i = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\lambda_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\lambda_j\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = Au. \end{aligned}$$

Exemplo 31. **(i)** Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, w) = (3x + y - 2z, 0, x + 4z)$. T é uma transformação linear e a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação às bases canónicas (ordenadas) $\mathcal{B}_c^4$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0, 0) = (3, 0, 1)$, $T(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $T(0, 0, 1, 0) = (-2, 0, 4)$ e $T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Tem-se então:

$$T(x, y, z, w) = M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

(ii) Sejam $\mathcal{S}_1 = \{1, t, t^2\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{1, t, t^2, t^3\}$ as bases canónicas (ordenadas) de P_2 e P_3 respectivamente. Seja $D : P_2 \to P_3$ tal que $D(1) = 0$, $D(t) = 1$ e $D(t^2) = 2t$. D é uma transformação linear e a matriz $M(D; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$ que representa D em relação às bases canónicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, é dada por

$$M(D; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (1 - y, 2x)$ **não** é uma transformação linear.

(iv) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = xy$ **não** é uma transformação linear.

Teorema 36. Seja V um espaço linear de dimensão finita. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ duas bases ordenadas de V. Seja $M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_1)$ a matriz que representa T em relação à base $\mathcal{S}_1$.

Então, a matriz $M(T; \mathcal{S}_2; \mathcal{S}_2)$ que representa T em relação à base $\mathcal{S}_2$, é dada por

$$M(T; \mathcal{S}_2; \mathcal{S}_2) = S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2} M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_1) \left(S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2}\right)^{-1},$$

onde $S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2}$ é a matriz de mudança da base $\mathcal{S}_1$ para $\mathcal{S}_2$.

Além disso,

$$S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2}M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_1)=M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2)$$

e

$$M(T;\mathcal{S}_2;\mathcal{S}_2)S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2}=M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2).$$

Isto é, o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{array}{rcl}
(V,\mathcal{S}_1) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_1)}{\longrightarrow}} & (V,\mathcal{S}_1)\\
S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2}\downarrow I & & I\downarrow S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2}\\
(V,\mathcal{S}_2) & \underset{M(T;\mathcal{S}_2;\mathcal{S}_2)}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (V,\mathcal{S}_2)
\end{array}$$

Teorema 37. Caso geral. Sejam U e V dois espaços lineares de dimensões finitas. Seja $T:U\to V$ uma transformação linear. Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_1'$ duas bases ordenadas de U. Sejam $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}_2'$ duas bases ordenadas de V. Seja $M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2)$ a matriz que representa T em relação às bases $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

Então, a matriz $M(T;\mathcal{S}_1';\mathcal{S}_2')$ que representa T em relação às bases $\mathcal{S}_1'$ e $\mathcal{S}_2'$, é dada por

$$M(T;\mathcal{S}_1';\mathcal{S}_2')=S_{\mathcal{S}_2\to\mathcal{S}_2'}M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2)\left(S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_1'}\right)^{-1},$$

onde $S_{\mathcal{S}_2\to\mathcal{S}_2'}$ e $S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_1'}$ são as matrizes de mudança das bases $\mathcal{S}_2$ para $\mathcal{S}_2'$ e de $\mathcal{S}_1$ para $\mathcal{S}_1'$ respectivamente.

Além disso,

$$S_{\mathcal{S}_2\to\mathcal{S}_2'}M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2)=M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2')$$

e

$$M(T;\mathcal{S}_1';\mathcal{S}_2')S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_1'}=M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2').$$

Isto é, o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{array}{rcl}
(U,\mathcal{S}_1) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{S}_1;\mathcal{S}_2)}{\longrightarrow}} & (V,\mathcal{S}_2)\\
S_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_1'}\downarrow I & & I\downarrow S_{\mathcal{S}_2\to\mathcal{S}_2'}\\
(U,\mathcal{S}_1') & \underset{M(T;\mathcal{S}_1';\mathcal{S}_2')}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (V,\mathcal{S}_2')
\end{array}$$

Exemplo 32. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(y,x)$. T é uma transformação linear. A matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$, é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Seja $\mathcal{S}=\{(1,1),(-1,1)\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

A matriz $M(T;\mathcal{S};\mathcal{S})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^2$, é dada por

$$M(T;\mathcal{S};\mathcal{S})=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,1)=(1,1)=1(1,1)+0(-1,1)$ e $T(-1,1)=(1,-1)=0(1,1)+(-1)(-1,1)$.

Vamos agora verificar que se tem

$$M(T;\mathcal{S};\mathcal{S}) = S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}} M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\left(S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}}\right)^{-1}.$$

Uma vez que $(0,1) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(-1,1)$ e $(1,0) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)$, tem-se então

$$S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}} M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\left(S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= M(T;\mathcal{S};\mathcal{S}). \end{aligned}$$

Isto é,

$$M(T;\mathcal{S};\mathcal{S}) = S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}} M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\left(S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}}\right)^{-1}.$$

Além disso,

$$S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}} M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{S})$$

e

$$M(T;\mathcal{S};\mathcal{S}) S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{S}} = M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{S}).$$

Definição 29. Sejam U e V espaços lineares e $S, T : U \to V$ transformações lineares. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Sejam $S+T, \lambda T : U \to V$ definidas por

$$(S+T)(u) = S(u) + T(u) \;\text{ e }\; (\lambda T)(u) = \lambda T(u),$$

para todo o $u \in U$. $S+T$ e λT são transformações lineares.

Definição 30. Sejam U e V espaços lineares. Chama-se a $\mathfrak{L}(U,V)$ o conjunto de **todas** as transforma ções lineares de U em V.

Teorema 38. Sejam U e V espaços lineares. O conjunto $\mathfrak{L}(U,V)$, com as operações da definição 29, é um espaço linear.

Exemplo 33. Seja $\mathcal{S} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ com $T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definidas por

$$T_1(x,y) = (x,0),\;\; T_2(x,y) = (y,0),\;\; T_3(x,y) = (0,x) \;\text{ e }\; T_4(x,y) = (0,y),$$

para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. O conjunto $\mathcal{S}$ é uma base de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. Logo, $\dim \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) = 4$.

Transformações injectivas, sobrejectiva e bijectivas – equações lineares

Definição 31. Sejam U, V e W espaços lineares e, $T : U \to V$ e $S : V \to W$ transformações lineares. Seja $S \circ T$ (ou ST): $U \to W$ definida por

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)),$$

para todo o $u \in U$. $S \circ T$ é uma transformação linear. Chama-se a $S \circ T$ (ou ST) a **composição de** S com T.

Observação 32. Em geral, tem-se $S \circ T \neq T \circ S$.

Teorema 39. Sejam U, V e W espaços lineares de dimensões finitas. Sejam $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}_3$ bases de U, V e W respectivamente. Sejam $T \in \mathfrak{L}(U, V)$ e $S \in \mathfrak{L}(V, W)$. Então, tem-se

$$M(S \circ T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_3) = M(S; \mathcal{S}_2; \mathcal{S}_3) M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2).$$

Teorema 40. **(i)** Sejam $T : U \to V$, $S : V \to W$ e $R : W \to X$. Então, tem-se

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

(ii) Sejam $R, S : U \to V$ e $T : V \to W$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, tem-se

$$T \circ (R + S) = T \circ R + T \circ S \text{ e } T \circ (\lambda R) = \lambda (T \circ R).$$

Se o contradomínio de Q estiver contido em U então

$$(R + S) \circ Q = R \circ Q + S \circ Q \text{ e } (\lambda R) \circ Q = \lambda (R \circ Q).$$

Definição 32. Define-se

$$T^0 = I \text{ e } T^k = T \circ T^{k-1}, \text{ para todo o } k = 1, 2, ...$$

Observação 33. Tem-se $T^{m+n} = T^m \circ T^n$ para todos os $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 33. **(i)** $T : U \to V$ diz-se **injectiva** se e só se

$$T(u) = T(w) \quad \Rightarrow \quad u = w,$$

para todos os $u, w \in U$, isto é, se e só se

$$u \neq w \quad \Rightarrow \quad T(u) \neq T(w),$$

para todos os $u, w \in U$.

(ii) $T : U \to V$ diz-se **sobrejectiva** se e só se

$$T(U) = V.$$

(iii) $T : U \to V$ diz-se **bijectiva** se e só se fôr injectiva e sobrejectiva.

Definição 34. Sejam U e V espaços lineares. Diz-se que U e V são isomorfos se e só se existir um **isomorfismo** entre U e V, isto é, se e só se existir uma transformação linear bijectiva $T : U \to V$.

Teorema 41. Sejam U e V espaços lineares de dimensões finitas tais que $\dim U = n$ e $\dim V = m$. Então, os espaços lineares $\mathfrak{L}(U, V)$ e $\text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ são isomorfos e escreve-se

$$\mathfrak{L}(U, V) \cong \text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Dem. Fixando bases $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ para U e V respectivamente,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(U, V) & \to & \text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ T & \to & M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2) \end{array}$$

é uma transformação linear bijectiva.

Teorema 42. Sejam U e V dois espaços lineares de dimensões finitas. U e V são isomorfos se e só se $\dim U = \dim V$.

Observação 34. No teorema 41 tem-se $\dim \mathfrak{L}(U, V) = mn$.

Teorema 43. Sejam U e V espaços lineares de dimensões finitas tais que $\dim U = \dim V$. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então, T é injectiva se e só se T é sobrejectiva.

Definição 35. Sejam U e V espaços lineares e $T : U \to V$ uma transformação linear. Seja $\mathbf{0}$ o vector nulo de V.

(i) Chama-se **contradomínio** ou imagem de T ao conjunto

$$T(U) = \{T(u) : u \in U\},$$

que também se denota por $\mathcal{I}(T)$.

(ii) Chama-se **núcleo** ou espaço nulo de T ao conjunto

$$\text{Nuc}(T) = \{u \in U : T(u) = \mathbf{0}\}.$$

Teorema 44. Sejam U e V espaços lineares e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então, os conjuntos $\text{Nuc}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$ são subespaços de U e V respectivamente.

Exemplo 34. Sejam U e V espaços lineares. Sejam $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ os vectores nulos de U e V respectivamente.

(i) Considere a transformação nula $O : U \to V$ definida por

$$O(u) = \mathbf{0}',$$

para todo o $u \in U$. Tem-se

$$\text{Nuc}(O) = U \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(O) = \{\mathbf{0}'\}.$$

(ii) Considere a transformação identidade $I : U \to U$ definida por

$$I(u) = u,$$

para todo o $u \in U$. Tem-se

$$\text{Nuc}(I) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(I) = U.$$

Exemplo 35. Seja $A \in \text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Seja

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definida por

$$T(u) = Au,$$

para todo o $u \in \mathbb{R}^n$. Tem-se

$$\text{Nuc}(T) = \text{Nuc}(A) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(T) = \mathcal{C}(A).$$

Definição 36. Sejam U e V espaços lineares e $T : U \to V$ uma transformação linear.

(i) Chama-se **característica** de T à dimensão de $\mathcal{I}(T)$, isto é,

$$\text{car}\, T = \dim \mathcal{I}(T).$$

(ii) Chama-se **nulidade** de T à dimensão de $\text{Nuc}(T)$, isto é,

$$\text{nul}\, T = \dim \text{Nuc}(T).$$

Teorema 45. Sejam U um espaço linear de dimensão finita e T uma transformação linear definida em U. Então, o subespaço $\mathcal{I}(T)$ tem dimensão finita e

$$\dim \text{Nuc}(T) + \dim \mathcal{I}(T) = \dim U.$$

Teorema 46. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Sejam $\mathcal{B}_c^n$ e $\mathcal{B}_c^m$ as bases canónicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^n; \mathcal{B}_c^m) \in \text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz que representa T em relação às bases $\mathcal{B}_c^n$ e $\mathcal{B}_c^m$. Tem-se então:

(i) $\dim \text{Nuc}(T) = \text{nul}\, A$;

(ii) $\dim \mathcal{I}(T) = \text{car}\, A$;

(iii) T é injectiva se e só se $\text{nul}\, A = 0$, isto é, se e só se $\text{car}\, A = n$;

(iv) T é sobrejectiva se e só se $\text{car}\, A = m$.

Definição 37. Diz-se que $T : U \to V$ é invertível se existir $S : T(U) \to U$ tal que

$$S \circ T = I_U \quad \text{e} \quad T \circ S = I_{T(U)},$$

onde I_U e $I_{T(U)}$ são as funções identidade em U e $T(U)$ respectivamente. Chama-se a S a inversa de T e escreve-se

$$S = T^{-1}.$$

Teorema 47. Sejam U e V espaços lineares de dimensões finitas. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Seja $\mathbf{0}$ o vector nulo de U. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) T é injectiva.

(ii) T é invertível e a inversa $T^{-1} : T(U) \to U$ é linear.

(iii) $\mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

(iv) $\dim U = \dim T(U)$.

(v) T transforma vectores linearmente independentes de U em vectores linearmente independentes de V.

(vi) T transforma bases de U em bases de $T(U)$.

Teorema 48. Sejam U e V dois espaços lineares de dimensões finitas. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ duas bases ordenadas de U e V respectivamente. Seja $A = M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$ a matriz que representa T em relação às bases $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

Se $V = T(U)$ então T é invertível se e só se A fôr uma matriz quadrada não singular. Tem-se então

$$A^{-1} = M(T^{-1}; \mathcal{S}_2; \mathcal{S}_1),$$

isto é, A^{-1} será a matriz que representa T^{-1} em relação às bases $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}_1$.

Teorema 49. Sejam U e V espaços lineares. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Seja $b \in V$. Então:

(i) Existência de solução: o sistema $T(u) = b$ tem pelo menos uma solução u se e só se $b \in T(U)$;

(ii) Unicidade de solução: o sistema $T(u) = b$ tem no máximo uma solução u se e só se T fôr injectiva;

(iii) Existência e unicidade de solução: o sistema $T(u) = b$ tem solução única u se e só se $b \in T(U)$ e T fôr injectiva.

Teorema 50. Sejam U e V espaços lineares. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Seja $b \in V$. A solução geral do sistema de equações lineares $T(u) = b$ obtém-se somando a uma solução particular desse sistema a solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $T(u) = \mathbf{0}$.

Determinante

Definição 38. Dados os números naturais $1, 2, ..., n$ chama-se **permutação** desses n números a qualquer lista em em que os mesmos sejam apresentados por ordem arbitrária.

Definição 39. Seja $(i_1 i_2 ... i_n)$ uma permutação dos números naturais $1, 2, ..., n$. Diz-se que um par $(i_j i_k)$ é uma **inversão** quando $(j-k)(i_j - i_k) < 0$ (isto é, quando i_j e i_k aparecerem na permutação por ordem decrescente).

Definição 40. Uma permutação $(i_1 i_2 ... i_n)$ diz-se **par** (**ímpar**) quando o n^o máximo de inversões incluídas fôr par (ímpar).

Exemplo 36. A permutação (21453) é ímpar pois contem as inversões $(21), (43)$ e (53).

Definição 41. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se **determinante**[7] de A, e escreve-se $|A|$ ou $\det A$, o número que se obtem do seguinte modo:

(i) Formam-se todos os produtos possíveis de n factores em que intervenha um elemento de cada linha e, simultaneamente, um elemento de cada coluna de A.

(ii) Afecta-se cada produto do sinal $+$ ou do sinal $-$ conforme as permutações (dos números naturais $1, 2, ..., n$) que figuram nos índices de linha e de coluna tenham a mesma paridade ou não.

(iii) Somam-se as parcelas obtidas.

Em resumo:

$$|A| = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(i_1 i_2 ... i_n) \text{ e } (j_1 j_2 ... j_n) \\ \text{permutações de } 1,2,...,n}} (-1)^\sigma a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} ... a_{i_n j_n},$$

em que

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } (i_1 i_2 ... i_n) \text{ e } (j_1 j_2 ... j_n) \text{ têm a mesma paridade} \\ \\ 1 & \text{se } (i_1 i_2 ... i_n) \text{ e } (j_1 j_2 ... j_n) \text{ têm paridade diferente.} \end{cases}$$

Observação 35. Podemos ainda escrever de modo equivalente:

(i)

$$|A| = \sum_{\substack{(j_1 j_2 ... j_n) \\ \text{permutação de } 1,2,...,n}} (-1)^\sigma a_{1 j_1} a_{2 j_2} ... a_{n j_n},$$

em que

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } (j_1 j_2 ... j_n) \text{ é par} \\ \\ 1 & \text{se } (j_1 j_2 ... j_n) \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

[7]O Determinante de uma matriz foi pela primeira vez considerado por Talakazu Seki 1642–1708

(ii)
$$|A| = \sum_{\substack{(i_1 i_2 ... i_n) \\ \text{permutação de } 1,2,...,n}} (-1)^\sigma a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n},$$
em que
$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } (i_1 i_2 ... i_n) \text{ é par} \\ \\ 1 & \text{se } (i_1 i_2 ... i_n) \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Teorema 51. **(i)** Seja $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(ii) Seja $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Observação 36. Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então $|A|$ tem $n!$ parcelas.

Exemplo 37. **(i)**
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - (-1)2 = 0.$$

(ii)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1(-1)(-3) + 3 + 8 - 1(-1)2 - 6(-3) - 2 = 32.$$

Teorema 52. Sejam $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\det(AB) = \det A \det B$.

(ii) Se A fôr uma matriz triangular superior ou triangular inferior então $\det A =$ produto dos elementos da diagonal principal de A.

(iii) Se A tiver uma linha nula então $\det A = 0$.

(iv) Se B fôr obtida de A multiplicando uma linha de A por um número real λ então $\det B = \lambda \det A$.

(v) Se B fôr obtida de A somando a uma linha de A um múltiplo real λ de uma outra linha de A então $\det B = \det A$.

(vi) Se duas linhas de A forem iguais então $\det A = 0$.

(vii) Se B fôr obtida de A trocando duas linhas de A então $\det B = -\det A$.

(viii) $\det\left(A^T\right) = \det A$.

(ix) Se A fôr invertível $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

(x) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(xi) $\det(AB) = 0 \Rightarrow \det A = 0$ ou $\det B = 0$.

(xii) $\det(AB) = \det(BA)$.

Definição 42. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$. Seja A_{ij} a matriz do tipo $(n-1)\times(n-1)$ que se obtem de A suprimindo a linha i e a coluna j de A. Chama-se a A_{ij} o **menor-**ij da matriz A.

Teorema 53. (Fórmula de Laplace[8].) Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$. Tem-se

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Observação 37. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$. Tem-se

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Exemplo 38.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-3) + (-2)4 + 2(-2)3 - (-1)3 - (-2)2(-3) - 4(-2) + 2\left[(-2) - (-2)\right] = -18$$

Definição 43. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$. Seja $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ onde A_{ij} é o menor-ij da matriz A. Chama-se a a'_{ij} o **cofactor-**ij da matriz A e à matriz $\mathrm{cof}\, A = (a'_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$, a matriz dos cofactores de A.

Teorema 54. Para qualquer matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$, tem-se

$$A\,(\mathrm{cof}\, A)^T = (\det A)\, I.$$

Se $\det A \neq 0$ então A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(\mathrm{cof}\, A)^T.$$

[8]Pierre-Simon Laplace 1749–1827

Exemplo 39. **(i)** Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\det A \neq 0$. Então A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(Veja por exemplo o ex^o 10 da ficha 2.) Note que $ad - bc = \det A$.

(ii) Podemos usar o teorema 54 para calcular não só a inversa de uma matriz (não singular) mas também entradas concretas dessa inversa. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

A entrada $(2,3)$ da matriz A^{-1} é dada por

$$(A^{-1})_{23} = \frac{1}{\det A}\left((\operatorname{cof} A)^T\right)_{23} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{3+2}\det A_{32}\right) = \frac{1}{-3}\left(-\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right)\right) = 2.$$

Teorema 55. (Regra de Cramer[9].) Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é não singular. Então a única solução do sistema de equações lineares $AX = B$ é dada por

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^T B.$$

Isto é, sendo $X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T$ tem-se

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a'_{kj}b_k = \frac{\det B_j}{\det A},$$

onde B_j é a matriz obtida de A substituindo a coluna j de A pela matriz coluna B dos termos independentes.

Exemplo 40. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + 2y + 4z = 7 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

pode ser resolvido usando a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 13, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = -18 \qquad \text{e} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 14.$$

Observação 38. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A matriz A é invertível se e só se $\det A \neq 0$.

[9] Gabriel Cramer 1704–1752

Valores Próprios e Vectores Próprios

Definição 44. Seja U espaço lineare e $T : U \to V$ uma transformação linear. Diz-se que um escalar λ é um **valor próprio** de T se existir um vector não nulo $u \in U$ tal que

$$T(u) = \lambda u.$$

Aos vectores não nulos u que satisfazem a equação anterior chamam-se **vectores próprios** associados ao valor próprio λ. Dado um valor próprio λ de T, o conjunto

$$E_\lambda = \{u \in U : T(u) = \lambda u\}$$

é um subespaço linear de U. Chama-se a E_λ o **subespaço próprio** de T associado ao valor próprio λ.

Teorema 56. Sejam V um espaço linear e $\mathbf{0}$ o vector nulo de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear.

(i) Um escalar λ é um valor próprio de T se e só se $\text{Nuc}(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Sendo λ um valor próprio de T, o subespaço próprio de T, associado ao valor próprio λ, é dado por

$$E_\lambda = \text{Nuc}(T - \lambda I).$$

(ii) Se o espaço linear V tiver dimensaõ finita e se A fôr a matriz que representa T em relação a uma base de V, então um escalar λ é um valor próprio de T se e só se esse escalar λ fôr solução da equação

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Definição 45. Seja $A \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se a

$$\det(A - \lambda I),$$

o **polinómio característico** da matriz A. O polinómio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ tem grau n, o coeficiente do termo de grau n é $(-1)^n$ e o termo constante é $p(0) = \det A$.

Definição 46. Seja $A \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se **valor próprio** de A a qualquer escalar λ tal que $A - \lambda I$ seja singular, isto é, tal que $\det(A - \lambda I) = 0$. Chama-se **vector próprio** de A, associado ao valor próprio λ de A, a qualquer vector não nulo v que verifique

$$(A - \lambda I)v = \mathbf{0}.$$

Observação 39. Seja $A \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. O escalar 0 é valor próprio de A se e só se A fôr singular. Isto é, a matriz A é invertível se e só se 0 não fôr valor próprio de A.

Definição 47. Sejam $A, B \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. As matrizes A e B dizem-se **semelhantes** se existir uma matriz S invertível tal que

$$B = SAS^{-1}$$

Teorema 57. Sejam $A, B \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se A e B forem semelhantes então A e B têm o mesmo polinómio característico. Em particular, se A e B forem semelhantes então A e B têm os mesmos valores próprios.

Dem. Tem-se

$$\begin{aligned}
\det(B-\lambda I) &= \det(SAS^{-1}-\lambda I) = \\
&= \det(SAS^{-1}-\lambda SS^{-1}) = \\
&= \det(S(A-\lambda I)S^{-1}) = \\
&= \det S \det(A-\lambda I)\det\left(S^{-1}\right) = \\
&= \det S \det(A-\lambda I)\frac{1}{\det S} = \\
&= \det(A-\lambda I).
\end{aligned}$$

Teorema 58. Seja V um espaço linear. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Se T tiver valores próprios distintos $\lambda_1, ..., \lambda_k$ e se $u_1, ..., u_k$ forem os vectores próprios associados a cada um destes valores próprios, então os vectores $u_1, ..., u_k$ são linearmente independentes.

Definição 48. Seja $A \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se existir uma matriz S invertível tal que

$$D = SAS^{-1},$$

com D **matriz diagonal**, então diz-se que A é uma **matriz diagonalizável** e que S (matriz de mudança de base) é a **matriz diagonalizante**.

Teorema 59. Seja V um espaço linear de dimensão finita. Uma transformação linear $T : V \to V$ será representada em relação a uma base de V por uma matriz diagonal se e só se essa base de V fôr apenas constituída por vectores próprios de T. Neste caso, as entradas da diagonal principal dessa matriz diagonal serão os valores próprios associados aos vectores próprios da base de V pela ordem da mesma.

Em particular, se $\dim V = n$ e se T tiver n valores próprios distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ então a matriz que representa em relação a qualquer base $\{u_1, ..., u_n\}$ onde $u_1, ..., u_n$ são os vectores próprios associados aos valores próprios $\lambda_1, ..., \lambda_n$, é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dem. Uma transformação linear $T : V \to V$ será representada em relação a uma base $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_n\}$ de V por uma matriz diagonal se e só se

$$T(u_k) = \lambda_k u_k, \qquad k = 1, ..., n,$$

tendo-se

$$M(T;\mathcal{S};\mathcal{S}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Mas isso é equivalente a dizer que λ_k é um valor próprio de T e que u_k é o respectivo vector próprio.

Observação 40. Seja V um espaço linear tal que $\dim V = n$ e $T : V \to V$ uma transformação linear. Seja A a matriz que representa T numa base.

(1) Seja $p(\lambda)$ o polinómio característico de A. Para cada raiz λ_1 de $p(\lambda)$, a sua multiplicidade enquanto raiz do polinómio chama-se mutliplicidade algébrica de λ_1 e denota-se por $m_a(\lambda_1)$. Mais precisamente, λ_0 tem tem multiplicidade algébrica m quando

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m q(\lambda)$$

e $q(\lambda_1) \neq 0$.

(2) À dimensão de $\mathrm{Nuc}(A - \lambda_1 I)$ chama-se multiplicidade geométrica e designa-se por $m_g(\lambda_1)$.

(3) A matriz $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ é diagonalizável se e só se

$$\sum_{\lambda \text{ valores proprios}} \mathrm{dimNuc}(A - \lambda I) = \dim(V).$$

Ou seja, existe uma base de V na qual a representação matricial de T é uma matriz diagonal sse

$$\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_k} = n,$$

onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ $(k \leq n)$ são os valores próprios de T.

Teorema 60. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é simétrica, isto é, tal que $A = A^T$. Então A é diagonalizável.

Exemplo 41. Nos exemplos que se seguem as matrizes A consideradas poderão ser vistas como matrizes que representam transformações lineares T relativamente à base canónica (ou outras) de $\mathbb{R}^3$, tendo-se nesse casos, para todo o $u \in \mathbb{R}^3$,

$$T(u) = Au.$$

Deste modo, os valores próprios e vectores próprios de T serão respectivamente os valores próprios e vectores próprios de A.

(i) Uma matriz com valores próprios distintos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) - 20 + 4(2+\lambda) = \\
&= (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) + 4\lambda - 12 = \\
&= (3-\lambda)\left[(\lambda-1)(\lambda+2) - 4\right] = \\
&= (3-\lambda)\left(\lambda^2 + \lambda - 6\right) = \\
&= (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+3).
\end{aligned}$$

Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A-\lambda I)=0$. Logo, os valores próprios de A são

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -3.$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio λ são os vectores não nulos $u \in \mathbb{R}^3$ para os quais

$$(A - \lambda I)\, u = 0,$$

isto é, são os vectores não nulos de $\operatorname{Nuc}(A - \lambda I)$.

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$. Tem-se

$$\operatorname{Nuc}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0,1,5)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{Nuc}(A - \lambda_1 I) = L\left(\{(0,1,5)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$$u = (0, s, 5s)\,, \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$. Tem-se

$$\operatorname{Nuc}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,1,4)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \operatorname{Nuc}(A - \lambda_2 I) = L\left(\{(1,1,4)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (s, s, 4s)\,, \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_3 = -3$. Tem-se

$$\operatorname{Nuc}(A - \lambda_3 I) = \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(3,-2,2)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$E_{\lambda_3} = \operatorname{Nuc}(A - \lambda_3 I) = L\left(\{(3,-2,2)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_3 = -3$ são

$$u = (3s, -2s, 2s)\,, \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Atendendo a que os valores próprios de A são distintos, pelo teorema 58, os vectores próprios de A associados a esses valores próprios são linearmente independentes. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então 3 vectores em $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes formarão desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Logo, o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(0,1,5), (1,1,4), (3,-2,2)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$. Deste modo, temos uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Logo, a matriz A é diagonalizável, isto é, existe uma matriz invertível S diagonalizante tal que a matriz SAS^{-1} é diagonal, tendo-se

$$D = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

com

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que cada coluna de S^{-1} é formada pelo vector próprio associado ao valor próprio respectivo e na posição respectiva. Além disso, tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \overset{M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)}{\underset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{S}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{S}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{S}) & \overset{T}{\underset{M(T;\mathcal{S};\mathcal{S})}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{S}) \end{array}$$

com

$$S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{S}} = S, \quad M(T;\mathcal{S};\mathcal{S}) = D \quad \text{e} \quad M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = A.$$

(ii) Uma matriz com valores próprios repetidos mas diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + 6 + 6 - 3(3-\lambda) - 6(2-\lambda) - 2(4-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-7). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de A são

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 7.$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio λ são os vectores não nulos $u \in \mathbb{R}^3$ para os quais

$$(A - \lambda I)\, u = 0,$$

isto é, são os vectores não nulos de $\operatorname{Nuc}(A - \lambda I)$.

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$. Tem-se

$$\operatorname{Nuc}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{Nuc}(A - \lambda_1 I) = L\left(\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ são

$$u = (-s-t, s, t), \quad \text{com} \quad s, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 7$. Tem-se

$$\operatorname{Nuc}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,2,3)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \operatorname{Nuc}(A - \lambda_2 I) = L\left(\{(1,2,3)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 7$ são

$$u = (s, 2s, 3s), \quad \text{com} \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Atendendo a que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3,$$

podemos ter a seguinte base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A

$$\mathcal{S} = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,2,3)\}.$$

Logo, a matriz A é diagonalizável, isto é, existe uma matriz invertível S diagonalizante tal que a matriz SAS^{-1} é diagonal, tendo-se

$$D = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

com

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que cada coluna de S^{-1} é formada pelo vector próprio associado ao valor próprio respectivo e na posição respectiva. Além disso, tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{S}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{S}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{S}) & \underset{M(T;\mathcal{S};\mathcal{S})}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{S}) \end{array}$$

com

$$S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{S}} = S, \quad M(T; \mathcal{S}; \mathcal{S}) = D \quad \text{e} \quad M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = A.$$

(iii) Uma matriz com valores próprios repetidos e não diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & 5 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 20 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (7-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) + 100 - 20(2+\lambda) = \\ &= (3-\lambda)\left[(7-\lambda)(-2-\lambda) + 20\right] = \\ &= (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = \\ &= (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de A são

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio λ são os vectores não nulos $u \in \mathbb{R}^3$ para os quais

$$(A - \lambda I)\, u = 0,$$

isto é, são os vectores não nulos de $\operatorname{Nuc}(A - \lambda I)$.

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$. Tem-se

$$\operatorname{Nuc}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0,1,5)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{Nuc}(A - \lambda_1 I) = L\left(\{(0,1,5)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$$u = (0, s, 5s), \ \text{ com } \ s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Determinemos os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$. Tem-se

$$\operatorname{Nuc}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 20 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1, -5, -20)\}\right).$$

Logo, o subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \operatorname{Nuc}(A - \lambda_2 I) = L\left(\{(1, -5, -20)\}\right).$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (s, -5s, -20s), \quad \text{com} \quad s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Atendendo a que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 < 3,$$

não é possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Logo, a matriz A não é diagonalizável, isto é, não existe uma matriz invertível S diagonalizante tal que a matriz SAS^{-1} seja diagonal.

(iv) Uma matriz com apenas um valor próprio real.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 (1 - \lambda) + (1 - \lambda) = \\ &= (1 - \lambda)\left(\lambda^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de A são

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -i.$$

Logo, a matriz A não é diagonalizável numa matriz de entradas reais, isto é, não existe uma matriz invertível S diagonalizante tal que a matriz SAS^{-1} seja diagonal com entradas reais. No entanto e atendendo a que os três valores próprios são distintos, a matriz A é diagonalizável numa matriz de entradas complexas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Sistemas de equações diferenciais

Como aplicação imediata dos resultados obtidos acima, vamos resolver uma certa classe de sistemas de equações diferencias. Considere funções $x_1(t), x_(t), \cdots, x_n(t)$ diferenciáveis na variável real t. O sistema da forma

$$(*)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) = x_1'(t) \\ a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) = x_2'(t) \\ \cdots \\ a_{m1}x_1(t) + a_{m2}x_2(t) + ... + a_{mn}x_n(t) = x_m'(t) \end{array}\right.$$

chama-se sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem, em que a_{ij} e b_k são constantes, para $i, k = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$ e $x_i'(t)$ denota a derivada de $x_i(t)$ (para cada $i = 1, \cdots, n$).

O sistema de equações diferenciais (*) pode escrever-se na forma matricial:

$$x'(t) = Ax(t)$$

onde $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ e $x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$.

Se $n = 1$, então temos que, para cada constante c, a função $x_1(t) = ce^{\lambda t}$ é solução da equação diferencial $x_1'(t) = \lambda x_1(t)$.

Se a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ é diagonalizável, para resolver o sistema de equações diferenciais

$$x' = Ax$$

em primeiro lugar encontra-se uma martiz mudança de base

$$S = M(I; B_{vp}, Bc)$$

onde B_{vp} é uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A, Bc é a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e matriz diagonal

$$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

(formada pelos valores próprios de A) tais que $D = S^{-1}AS$. De uma forma equivalente, encontra-se a matriz mudança de base $P = M(I, Bc, B_{vp})$ tal que $D = PAP^{-1}$, uma vez que $P = S^{-1}$. Depois, usa-se a mudança de variável $y = S^{-1}x$ e resolve-se a o sistema de equações diferenciais $y'(t) = Dy(t)$, cuja solução geral é (usando o caso $n = 1$ sucessivamente)

$y(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{\lambda_1 t} \\ c_2e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_ne^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$ onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os valores próprios de A e $c_1, \cdots, c_n$ são constantes.

Finalmente, a solução geral do sistema inicial

$$x'(t) = Ax(t) \qquad \text{é} \quad x(t) = Sy(t)$$

Ver exercícios resolvidos na lista das aulas práticas!

Produtos Internos

Definição 49. Sejam V um espaço linear real e $\mathbf{0}$ o vector nulo de V. Chama-se **produto interno** em V à aplicação

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\to \langle u,v \rangle \end{aligned}$$

que verifique as três condições seguintes.

(i) Simetria: para todos os $u, v \in V$

$$\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle .$$

(ii) Linearidade: para todo o $v \in V$ (fixo) a aplicação

$$V \to \mathbb{R}$$

$$u \to \langle u,v \rangle$$

é linear.

(iii) Positividade: para todo o $u \in V$ tal que $u \neq \mathbf{0}$,

$$\langle u,u \rangle > 0.$$

Observação 41. Um produto interno é uma aplicação **bilinear**, **simétrica** e **definida positiva**.

Definição 50. Chama-se **espaço euclidiano** a um espaço linear com um produto interno.

Observação 42. Seja V um espaço euclidiano real. Seja $\mathcal{S} = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ uma base de V. Sejam $u, v \in V$. Sejam

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \quad \text{e} \quad \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$$

as coordenadas de u e de v na base $\mathcal{S}$ respectivamente, isto é,

$$u = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \quad \text{e} \quad v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_n w_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle u,v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle w_i, w_j \rangle = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle w_1,w_1 \rangle & \langle w_1,w_2 \rangle & \ldots & \langle w_1,w_n \rangle \\ \langle w_2,w_1 \rangle & \langle w_2,w_2 \rangle & \ldots & \langle w_2,w_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle w_n,w_1 \rangle & \langle w_n,w_2 \rangle & \ldots & \langle w_n,w_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isto é, existe uma matriz simétrica e definida positiva (todos os seus valores próprios são positivos):

$$A = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, w_2 \rangle & \dots & \langle w_1, w_n \rangle \\ \langle w_2, w_1 \rangle & \langle w_2, w_2 \rangle & \dots & \langle w_2, w_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle w_n, w_1 \rangle & \langle w_n, w_2 \rangle & \dots & \langle w_n, w_n \rangle \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad \langle u, v \rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 61. Seja V um espaço linear real com $\dim V = n$. Seja $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ uma base de V. Então, uma aplicação

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

é um produto interno (em V) se e só se

$$\langle u, v \rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

com

$$u = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n, \quad v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_n w_n$$

e A é uma matriz simétrica cujos valores próprios são todos positivos. Se a aplicação $\langle , \rangle$ fôr um produto interno tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, w_2 \rangle & \dots & \langle w_1, w_n \rangle \\ \langle w_2, w_1 \rangle & \langle w_2, w_2 \rangle & \dots & \langle w_2, w_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle w_n, w_1 \rangle & \langle w_n, w_2 \rangle & \dots & \langle w_n, w_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Exemplo 42. (i) Seja $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2,$$

com $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Esta aplicação é um produto interno em $\mathbb{R}^2$ a que se dá o nome de produto interno usual em $\mathbb{R}^2$, uma vez que

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é simétrica e o único valor próprio de A é $1 > 0$.

(ii) Seja $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = -2\alpha_1 \beta_1 + 3\alpha_2 \beta_2,$$

com $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^2$. Esta aplicação não é um produto interno em $\mathbb{R}^2$, uma vez que

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\rangle=-2\alpha_1\beta_1+3\alpha_2\beta_2=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$$

com

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

A matriz A é simétrica, no entanto, os valores próprios de A: -2 e 3 não são ambos positivos.

Exemplo 43. $\mathbb{R}^2$ com um produto interno não usual. Seja $\langle,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\rangle=2\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_2,$$

com $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^2$.

É fácil ver que esta aplicação é simétrica e linear em relação a (α_1,α_2) (fixando (β_1,β_2)). Vejamos por exemplo que a condição

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle>0,\quad\text{para todo o }\ (\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0),$$

é satisfeita.

Atendendo a que

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle=2\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2=\alpha_1^2+(\alpha_1+\alpha_2)^2,$$

tem-se

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle=0\Leftrightarrow(\alpha_1=0\ \text{ e }\ \alpha_1+\alpha_2=0)\Leftrightarrow(\alpha_1=0\ \text{ e }\ \alpha_2=0)\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0).$$

Em alternativa, podemos escrever

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\rangle=2\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_2=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$$

com

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

A matriz A é simétrica e os valores próprios de A: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ são ambos positivos.

Definição 51. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{0}$ o vector nulo de V. Sejam $u,v\in V$.

(i) Chama-se **norma** de u a:

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

(ii) Chama-se **projecção ortogonal** de v sobre $u\neq\mathbf{0}$ a:

$$\operatorname{proj}_u v=\frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2}u.$$

(iii) Diz-se que u e v são **ortogonais** se $\langle u, v\rangle = 0$.

(iv) Chama-se **ângulo** entre dois vectores não nulos u e v a:

$$\theta = \arccos \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Observação 43. O ângulo θ entre dois vectores não nulos u e v é $\frac{\pi}{2}$ se e só se u e v são ortogonais.

Teorema 62. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Seja V um espaço euclidiano. Então, para todos os $u, v \in V$,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Observação 44. (i) Teorema de Pitágoras. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$. Tem-se u e v ortogonais se e só se

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Dem.

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 &= \langle u - v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \\
&= \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2
\end{aligned}$$

se e só se

$$\langle u, v\rangle = 0,$$

isto é, se e só se u e v forem ortogonais.

(ii) Em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual, a desigualdade de Cauchy-Schwarz é dada por

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2},$$

uma vez que

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2,$$

com $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Em $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, a desigualdade de Cauchy-Schwarz é dada por

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2},$$

uma vez que

$$\langle (\alpha_1, ..., \alpha_n), (\beta_1, ..., \beta_n)\rangle = \alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_n\beta_n,$$

com $(\alpha_1, ..., \alpha_n), (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 63. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{0}$ o vector nulo de V. Sejam $u.v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. A norma satisfaz as seguintes propriedades.

(i) Positividade: $\|u\| > 0$ se $u \neq \mathbf{0}$.

(ii) Homogeneidade: $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$

(iii) Desigualdade triangular: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Observação 45. Pode definir-se **norma** num espaço linear V, sem estar associada a qualquer produto interno, como sendo uma aplicação de V em $\mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades do teorema anterior. A um espaço linear com uma norma chama-se **espaço normado**.

Observação 46. Seja V um espaço euclidiano. Sejam $u, v \in V$. Tem-se

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right).$$

Observação 47. Seja V um espaço linear real normado. Sejam $u, v \in V$. Então, a norma pode ser obtida de um produto interno na forma

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

se e só se

$$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2 \|u\|^2 + 2 \|v\|^2 .$$

Esta última equação é conhecida por **lei do paralelogramo**.

Exemplo 44. Uma norma que não é obtida a partir de um produto interno. Seja $\| \| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$\|(\alpha_1, \alpha_2)\| = |\alpha_1| + |\alpha_2| ,$$

com $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. É fácil verificar que esta aplicação satisfaz as três condições do teorema 63. Logo, é uma norma. No entanto, é também fácil verificar que esta norma não satisfaz a lei do paralelogramo. Logo, esta norma não poderá ser obtida a partir de um produto interno.

Definição 52. Sejam V um espaço euclidiano e $S \subset V$. Diz-se que S é **ortogonal** se para todos os $u, v \in S$ com $u \neq v$,

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Diz-se que S é **ortonormado** se fôr ortogonal e para todo o $u \in S$,

$$\|u\| = 1.$$

Teorema 64. Sejam V um espaço euclidiano e $S \subset V$. Seja $\mathbf{0}$ o vector nulo de V. Se S é ortogonal e $\mathbf{0} \notin S$ então S é linearmente independente. Em particular, se $n = \dim V$ então qualquer conjunto S ortogonal de n vectores não nulos é uma base de V.

Teorema 65. Seja V um espaço euclidiano com $\dim V = n$. Seja $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortogonal de V. Então, as coordenadas de um vector $v \in V$ em relação à base S são dadas por:

$$\alpha_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle},$$

com $j = 1, ..., n$. Se $\mathcal{S}$ fôr ortonormada então as coordenadas de um vector $v \in V$ em relação à base S são dadas por:

$$\alpha_j = \langle v, u_j \rangle\,,$$

com $j = 1, ..., n$.

Teorema 66. Seja V um espaço euclidiano real com $\dim V = n$. Seja $\mathcal{S} = \{w_1, ..., w_n\}$ uma base ortonormada de V. Então, para todos os $u, v \in V$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, w_i \rangle \langle v, w_i \rangle \quad \text{(fórmula de Parseval)} \quad \text{e} \quad \text{tem-se} \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle u, w_i \rangle^2}.$$

Observação 48. Seja V um espaço euclidiano real com $\dim V = n$. Seja $\mathcal{S} = \{w_1, ..., w_n\}$ uma base ortonormada de V. Sejam $u, v \in V$, com

$$u = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n, \quad v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_n w_n.$$

Então, atendendo ao teorema 65, a fórmula de Parseval é dada por:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + ... + \alpha_n \beta_n \quad \text{e} \quad \text{tem-se} \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}.$$

Notação 3. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{0}$ o vector nulo de V. Para qualquer $v \in V$, com $v \neq \mathbf{0}$, o vector $\frac{1}{\|v\|} v$ será denotado por $\frac{v}{\|v\|}$.

Teorema 67. Método de ortogonalização de Gram-Schmidt[10]. Seja V um espaço euclidiano. Considere o conjunto linearmente independente:

$$\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V.$$

Sejam

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2, \\ &\ \ ... \\ u_k &= v_k - \operatorname{proj}_{u_1} v_k - ... - \operatorname{proj}_{u_{k-1}} v_k. \end{aligned}$$

Então:

(i) $L(\{u_1, u_2, ..., u_k\}) = L(\{v_1, v_2, ..., v_k\})$

[10] Jorgen Pedersen Gram 1850–1916. Erhard Schmidt 1876–1959

(ii) O conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ é uma base ortogonal de $L(\{v_1, v_2, ..., v_k\})$.

(iii) O conjunto $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, ..., \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\}$ é uma base ortonormada de $L(\{v_1, v_2, ..., v_k\})$.

Exemplo 45. Considere-se $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja

$$U = L(\{(1,1,-1,-1), (1,2,3,4), (2,1,-6,-7), (1,3,7,9)\}).$$

Determinemos a dimensão de U e uma base ortonormada para U. Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -6 & 7 \\ -1 & 4 & -7 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{v_1, v_2\}$, com $v_1 = (1,1,-1,-1)$ e $v_2 = (1,2,3,4)$, é uma base de U e como tal $\dim U = 2$.

Sejam

$$u_1 = v_1 \quad \text{e} \quad u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2.$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2\}$, com $u_1 = (1,1,-1,-1)$ e

$$u_2 = (1,2,3,4) - \frac{1+2-3-4}{4}(1,1,-1,-1) = (2,3,2,3),$$

é uma base ortogonal de U. Uma base ortonormada para U:

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{26}}{13}, \frac{3\sqrt{26}}{26}, \frac{\sqrt{26}}{13}, \frac{3\sqrt{26}}{26} \right) \right\}$$

Teorema 68. Qualquer espaço euclidiano de dimensão finita tem uma base ortonormada.

Teorema 69. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Então, existe um único produto interno em $\mathbb{R}^n$ para o qual esta base é ortonormada.

Exemplo 46. Considere em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{S} = \{v_1, v_2\}$, com $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1,1)$. Vejamos que existe um e um só produto interno para o qual a base $\mathcal{S}$ é ortonormada.

Seja $\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0), (0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$. Tem-se

$$S_{B_c^2 \to \mathcal{S}} = \left(S_{\mathcal{S} \to B_c^2} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$. Tem-se

$$u = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{e} \quad v = (\beta_1, \beta_2),$$

onde α_1, α_2 e β_1, β_2 são as coordenadas na base $\mathcal{B}_c^2$ de u e v respectivamente. Seja $S = S_{B_c^2 \to \mathcal{S}}$. Logo, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definida por

$$\langle u, v \rangle = (Su)^T A (Sv), \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é um produto interno e é o único para o qual a base $\mathcal{S}$ é ortonormada. Tem-se então

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2.$$

É fácil verificar que para este produto interno a base $\mathcal{S}$ é ortonormada:

$$\langle(1,0), (1,1)\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle(1,0), (1,0)\rangle = \langle(1,1), (1,1)\rangle = 1.$$

Teorema 70. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é simétrica, isto é, tal que $A = A^T$. Então A é diagonalizável relativamente a uma base ortonormada vp formada só por vectores próprios de A. Seja S a matriz cujas colunas são os vectores da base vp e D a matriz diagonal onde se coloca na entrada i da diagonal o valor próprio λ_i que corresponde à coluna i de S. Então temos

$$D = S^T AS,$$

e portanto S é ortogonal $S^{-1} = S^T$

Definição 53. Sejam V um espaço euclidiano e S um subespaço de V. Diz-se que um elemento de V é **ortogonal a** S se fôr ortogonal a todos os elementos de S. Ao conjunto de todos os elementos ortogonais a S chama-se **complemento ortogonal** de S e designa-se por $S^\perp$.

Teorema 71. Qualquer que seja o subespaço S de um espaço euclidiano V, também $S^\perp$ é um subespaço de V.

Exemplo 47. (i) Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é um plano que passa pela origem, então $S^\perp$ é uma recta que passa pela origem e é perpendicular ao plano.

(ii) Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma recta que passa pela origem, então $S^\perp$ é um plano que passa pela origem e é perpendicular à recta.

(iii) Seja $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então,

$$\mathrm{Nuc}(A) = (\mathcal{L}(A))^\perp.$$

Teorema 72. Se S é um subespaço de dimensão finita de um espaço euclidiano V, então V é a soma directa de S e $S^\perp$, isto é, $V = S \oplus S^\perp$. Logo, cada elemento $v \in V$ pode ser escrito de modo único como soma de um elemento de S com um elemento de $S^\perp$:

$$v = v_S + v_{S^\perp}, \quad \text{com} \quad v_S \in S \quad \text{e} \quad v_{S^\perp} \in S^\perp.$$

À aplicação $P_S : V \to S$ definida por $P_S(v) = v_S$ chama-se **projecção ortogonal de** V **sobre** S e à aplicação $P_{S^\perp} : V \to S^\perp$ definida por $P_{S^\perp}(v) = v_{S^\perp}$ chama-se **projecção ortogonal de** V **sobre** $S^\perp$. Tem-se

$$I = P_S + P_{S^\perp}.$$

Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortonormada de S, então

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \, v_i,$$

para todo o $v \in V$.

Se $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ é uma base ortonormada de $S^\perp$, então

$$P_{S^\perp}(v) = \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle \, u_j,$$

para todo o $v \in V$.

As aplicações P_S e $P_{S^\perp}$ são transformações lineares de V em V que satisfazem as propriedades:

(i) $P_S(V) = S, \quad P_{S^\perp}(V) = S^\perp$;

(ii) $(P_S)^2 = P_S, \quad (P_{S^\perp})^2 = P_{S^\perp}$;

(iii) $\langle P_S(u), v \rangle = \langle u, P_S(v) \rangle, \quad \langle P_{S^\perp}(u), v \rangle = \langle u, P_{S^\perp}(v) \rangle$, para todos os $u, v \in V$;

(iv) $\|u\|^2 = \|P_S(u)\|^2 + \|P_{S^\perp}(u)\|^2$, para todo o $u \in V$ (Teorema de Pitágoras);

Observação 49. Seja S é um subespaço de dimensão finita de um espaço euclidiano V. Seja $v \in V$.

(i) $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$

(ii) $\left(S^\perp\right)^\perp = S$

(iii) Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de S então $v \in S^\perp$ se e só se

$$\langle v, v_1 \rangle = \langle v, v_2 \rangle = ... = \langle v, v_n \rangle = 0.$$

Teorema 73. Seja S é um subespaço de dimensão finita de um espaço euclidiano V. Seja $v \in V$. Então, existe um **elemento de** S **mais próximo de** v do que qualquer dos outros pontos de S. **Este elemento é a projecção ortogonal** $P_S(v)$ **de** v **sobre** S e tem-se

$$\|v - P_S(v)\| \leq \|v - u\|,$$

para todo o $u \in S$, e a igualdade verifica-se se e só se $u = P_S(v)$.

Definição 54. Seja V um espaço euclidiano. Seja S é um subespaço de V com $\dim S = k$. Seja $q \in V$. Chama-se ao conjunto

$$\{q\} + S$$

um k-plano. A **distância** d **de um ponto** $p \in V$ **a um** k**-plano** $\mathcal{P} = \{q\} + S$ é dada por:

$$d(p, \mathcal{P}) = \|P_{S^\perp}(p - q)\|.$$

Observação 50. A distância entre dois k-planos paralelos $\mathcal{P}_1 = \{a\} + S$ e $\mathcal{P}_2 = \{b\} + S$ é dada por:

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \left\| P_{S^\perp}(a-b) \right\|.$$

Exemplo 48. Considere-se $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

(i) Seja $\mathcal{P}$ o plano (em $\mathbb{R}^3$) que passa pelos pontos: $(1,2,1), (1,0,-1)$ e $(1,1,1)$. Tem-se

$$\mathcal{P} = \{(1,2,1)\} + L(\{(1,0,-1),(1,1,1)\})$$

Equação vectorial de $\mathcal{P}$:

$$(x,y,z) = (1,2,1) + \alpha(1,0,-1) + \beta(1,1,1),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Equações paramétricas de $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ \\ y = 2 + \beta \\ \\ z = 1 - \alpha + \beta \end{cases}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Equação cartesiana de $\mathcal{P}$:

$$x - 2y + z = -2.$$

Em alternativa, podemos determinar uma **equação cartesiana de** $\mathcal{P}$ do seguinte modo. Atendendo a que

$$\mathcal{P} = \{(1,2,1)\} + L(\{(1,0,-1),(1,1,1)\}),$$

seja

$$S = L(\{(1,0,-1),(1,1,1)\}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} S^\perp &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,0,-1)\rangle = 0 \ \text{ e } \ \langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0\right\} = \\ &= \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,-2,1)\}) \end{aligned}$$

e assim, a equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $(1,2,1)$ é dada por:

$$(\langle (x-1, y-2, z-1), (1,-2,1)\rangle = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1(x-1) - 2(y-2) + 1(z-1) = 0),$$

ou seja por

$$x - 2y + z = -2.$$

(ii) Determinemos a **equação cartesiana** da recta que passa pelos pontos $(1,1,0)$ e $(1,2,1)$. Tem-se

$$r = \{(1,1,0)\} + L(\{(0,1,1)\}),$$

uma vez que $(0,1,1) = (1,2,1) - (1,1,0)$. Seja

$$S = L(\{(0,1,1)\}).$$

Logo,

$$S^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (0,1,1) \rangle = 0\right\} = \mathrm{Nuc}\left(\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\right) = L(\{(1,0,0),(0,1,-1)\})$$

e assim, a equação cartesiana da recta r é dada por:

$$(\langle (x-1, y-1, z), (1,0,0) \rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle (x-1, y-1, z), (0,1,-1) \rangle = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1(x-1) = 0 \;\text{ e }\; 1(y-1) - 1z = 0),$$

ou seja por

$$\begin{cases} x = 1 \\ \\ y - z = 1. \end{cases}$$

Formas Quadráticas

Definição 55. Sejam V um espaço euclidiano real e $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortonormada de V. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Chama-se **forma quadrática** associada a A à aplicação $Q : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \alpha_j,$$

isto é,

$$Q(v) = \left[\begin{array}{ccc} \alpha_1 & ... & \alpha_n \end{array}\right] A \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array}\right]$$

onde $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são as coordenadas de v na base $\mathcal{S}$. Se A fôr uma matriz diagonal então tem-se

$$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \alpha_i^2$$

e diz-se que Q é uma **forma quadrática diagonal**.

Observação 51. No exemplo que se segue pode ver-se que duas matrizes diferentes podem estar associadas à mesma forma quadrática.

Exemplo 49. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. As formas quadráticas associadas a A e a B são dadas por

$$Q_A(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & x+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 2xy + 2y^2$$

e

$$Q_B(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 3x+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 2xy + 2y^2.$$

Logo, tem-se $Q_A = Q_B$.

Teorema 74. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Seja Q_A a forma quadrática associada à matriz A. Então, existe uma matriz simétrica $B = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $Q_A = Q_B$.

Teorema 75. Toda a forma quadrática é diagonalizável.

Exemplo 50. Considere-se a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x,y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2.$$

Tem-se

$$Q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

com $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Os valores próprios de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$. A forma quadrática diagonal correspondente é

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

com

$$D = SAS^T \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que S^T é a matriz diagonalizante obtida colocando na 1^a coluna um vector próprio de norma 1 associado ao valor próprio λ_1 e na 2^a coluna um vector próprio de norma 1 associado ao valor próprio λ_2. Observe-se que a matriz S é ortogonal, isto é, tem-se $S^T = S^{-1}$.

Tem-se então

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} S^T D S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^T DS \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 56. Diz-se que uma forma quadrática Q ou uma matriz simétrica que lhe esteja associada, é:

(i) definida positiva se $Q(v) > 0$, para todo o $v \neq \mathbf{0}$;

(ii) definida negativa se $Q(v) < 0$, para todo o $v \neq \mathbf{0}$;

(iii) semidefinida positiva se $Q(v) \geq 0$, para todo o v;

(iv) semidefinida negativa se $Q(v) \leq 0$, para todo o v;

(v) indefinida se existirem pontos onde Q seja positiva e pontos onde Q seja negativa.

Teorema 76. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é simétrica. Então,

(i) A é **definida positiva** se e só se todos os valores próprios de A forem positivos;

(ii) A é **definida negativa** se e só se todos os valores próprios de A forem negativos;

(iii) A é **semidefinida positiva** se e só se todos os valores próprios de A forem não negativos;

(iv) A é **semidefinida negativa** se e só se todos os valores próprios de A forem não positivos;

(v) A é **indefinida** se e só se A tiver pelo menos um valor próprio positivo e outro negativo.

Agradecimento.

Agradecimentos ao Prof. Nuno Martins por ter cedido os seus apontamentos teóricos em tex