Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Exercícios de Álgebra Linear

Todos os cursos, Alameda

2^o Semestre 2004/2005

Paulo Pinto
http://www.math.ist.utl.pt/~ppinto/

Fevereiro 2005

Conteúdo

1 Sistemas Lineares de Equações e o Cálculo Matricial

1.1 Números complexos

Exercício 1.1 *Verifique, com exemplos, que as inclusões* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ *são todas estritas. Será que isto implica que, p.ex.,* $\#\mathbb{N} \neq \#\mathbb{Z}$*??*

Exercício 1.2 *Escreva na forma* $a + bi$ *os seguintes números complexos:*

(a) $(2-i)^2$ *(b)* $\frac{2}{4-3i}$ *(c)* $\frac{1+i}{1-i}$ *(d)* $(i)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.3 *Escreva os seguintes números na forma polar* $z = \rho e^{i\theta}$*:*

(a) 7 (b) -2i (c) $\sqrt{1-i}$ *(d)* $\sqrt[3]{-i}$.

Exercício 1.4 *Seja* $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ *um polinómio de coeficientes reais (i.e. todos os coeficientes* $a_k \in \mathbb{R}$*).*
(a) Mostre que $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ *para qualquer* $z \in \mathbb{C}$.
(b) Conclua que se $\lambda = a + ib$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $b \neq 0$*, é raiz de* $p(z)$*, então* $\bar{\lambda}$ *também o é.*
(c) Mostre que se $n = 3$ *e* $p(z)$ *tem uma raiz com parte imaginária não nula, então* p *possui três raizes distintas.*
(d) Calcule todas as raizes de $p(z) = 5 + 9z + 8z^2 + 4z^3$.

1.2 Método de eliminação de Gauss

Exercício 1.5 *Resolva cada um dos sistemas de equações lineares, utilizando o método de Eliminação de Gauss:*

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$ *(b)* $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 0 \\ 9x + 6y = 1 \end{cases}$ *(c)* $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x + 2y + 2z + 3w = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 20 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - y + z = 11 \end{cases}$ *(e)* $\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 20 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ -6x + 4y + 10z = 24 \end{cases}$ *(f)* $\begin{cases} y + z = 2 \\ 3y + 3z = 6 \\ y + x + y = 0 \end{cases}$

Exercício 1.6 *Indique a matriz aumentada de cada sistema linear do exercício 1.5 e aplique o método de Eliminação de Gauss para confirmar o resultado obtido no exercício 1.5.*

Exercício 1.7 *(a) Discuta o sistema* $ax = b$ *na variável* x *em função dos parâmetros reais* a *e* b.
(b) Prove, usando o método de eliminação de Gauss, que o seguinte sistema nas incógnitas x, y *e nos parâmetros reais* a, b, c, d_1 *e* d_2 *é possível e determinado (SPD) se e só se* $ad - cb \neq 0$*:*

$$\begin{cases} ax + by = d_1 \\ cx + dy = d_2. \end{cases}$$

Resolução: Toda a complexidade de sistemas equações lineares está presente na alínea (a). Com efeito, ele é possível e determinado sse $a \neq 0$ (e neste caso $x = b/a$ é a única solução). Se $a = 0$ então ou $b = 0$ e portanto o sistema é possível indeterminado (todos os reais x resolvem a dita equação). Nos restantes casos, $a = 0$ e $b \neq 0$, o sistema é impossível.

Quanto à alínea (b), a matriz aumentada do sistema é: $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & d_1 \\ c & d & d_2 \end{array}\right]$. Vamos dividir a resolução em dois casos:

• Caso $a \neq 0$. Então por eliminação de Gauss temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & d_1 \\ c & d & d_2 \end{array}\right] \underset{-\frac{c}{a}L_1+L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} a & b & d_1 \\ 0 & d-\frac{cd_1}{a} & d_2-\frac{cd_1}{a} \end{array}\right].$$

Logo o sistema inicial é SPD sse $a \neq 0$ e $d - \frac{cd_1}{a} \neq 0$, mas como estamos a assumir que $a \neq 0$, podemos multiplicar esta última equação por a e obter $ad - cb \neq 0$.

• Caso $a = 0$. Aplicando a eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & b & d_1 \\ c & d & d_2 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} c & d & d_2 \\ 0 & b & d_1 \end{array}\right]$$

pelo que nem c nem b poderão ser nulos para que o sistema seja SPD, como $a = 0$, isto equivale a dizer que $ad - cb \neq 0$ como requerido.

Exercício 1.8 *Forneça exemplos concretos de sistemas de equações lineares $Ax = b$, uns possíveis determinados e outros indeterminados, cuja matrizes de coeficientes das incógnitas A não sejam quadradas.*

Resolução: O sistema com matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ é possível indeterminado e o sistema com matriz aumentada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ é possível mas determinado. Ambas satisfazem as condições requeridas no enunciado.

Exercício 1.9 *Discuta, em função do parâmetros α e β, cada sistema de equações cuja matriz aumentada é:*

$$(a)\ \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] \qquad (b)\ \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right]$$

Resolução: (a) Para $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ o sistema é possível e determinado. Para $\alpha = 1$ sistema é possível e indeterminado. Finalmente para $\alpha = -2$, o sistema é impossível.

(b) O sistema é possível e determinado se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 2$. É impossível para $\alpha = 0$ e $\beta \neq 2$. Nos restantes casos, o sistema linear é possível e indeterminado (i.e. $\beta = 2$ e qualquer α).

Exercício 1.10 *Sejam x_0 e x_1 duas soluções do sistema linear $Ax = b$. Prove que:*

(a) Para qualquer real λ, $x_\lambda = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1$ é solução de $Ax = b$,

(b) $x_\lambda - x_{\lambda'}$ é solução do sistema homogéneo associado $Ax = 0$ para quaisquer λ, λ' parametros.

Conclua que se $Ax = b$ tiver duas soluções distintas, então o conjunto solução é infinito.

1.3 Álgebra das matrizes

Exercício 1.11 *Considere o sistema $Ax = b$ cuja matriz matriz aumentada é* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \beta \\ 9 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

(a) Calcule as características de A e da matriz aumentada $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$ *em função dos parâmetros α e β.*
(b) Discuta o tipo de solução dos sistema em função dos parâmetros α e β.[1]

Resolução: Usando eliminação de Gauss temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \beta \\ 9 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{-9L_1+L_3}{\overset{-2L_1+L_2}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -5 & 2\alpha-1 & \beta-2 \\ 0 & -20 & 1+9\alpha & -10 \end{array}\right] \underset{-4L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -5 & 2\alpha-1 & \beta-2 \\ 0 & 0 & \alpha+5 & -4\beta-2 \end{array}\right].$$

(a) Donde

$$\text{car } A = \begin{cases} 3, & \alpha \neq -5 \\ 2, & \alpha = -5 \end{cases}, \qquad \text{car } [A|b] = \begin{cases} 3, & \alpha \neq -5,\ \beta \in \mathbb{R} \\ 3, & \alpha = -5 \text{ e } \beta \neq -1/2 \\ 2, & \alpha = -5 \text{ e } \beta = -1/2 \end{cases}.$$

(b) Dado o comentário em rodapé (em analisando novamente a matriz em escada de linhas) temos que o sistems é impossível quando $\alpha = -5$ e $\beta \neq -1/2$. É determinado quando $\alpha \neq -5$ e indeternminado quando $\alpha = -5$ e $\beta = -1/2$.

Exercício 1.12 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -1 \\ 2 & 3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \pi \\ 3 \end{bmatrix}$.
Calcule se possiivel $A + B$, $2A$, CD, AB, AC, DC, CB e AD.

Resolução: Dada a definição só AB, AC e AD não são possíveis de calcular.

Exercício 1.13 *(a) Encontre matrizes A e B do tipo 2×2 tais que $AB \neq BA$. Será que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?*
(b) Prove que dadas duas matrizes quadradas A e B tais que $AB = B$ e $BA = A$ então temos $A^2 = A$.

Resolução: (a) Há muitas – use por exemplo as seguintes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.14 *Sejam $A, B \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertíveis. Prove que AB também é invertível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Resolução: Temos que provar que existe uma matrix X tal que $X(AB) = (AB)X = I$, onde I denota a matriz identidade $n \times n$. Mas como sugere o enunciado, $X = B^{-1}A^{-1}$. Provemos p.ex. que $X(AB) = I$:

$$X(AB) = B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathbf{1}B = B^{-1}B = \mathbf{1},$$

onde na segunda igualdade usa-se associatividade a da multiplicação matricial, na terceira igualdade a hipótese de A^{-1} ser a inversa de A e na última igualdade a hipótese de B^{-1} ser a inversa de B.

[1]Note que num sistema $Ax = b$: car(A) = car $[A|b]$ sse o sistema é possível (portanto impossível sse car $[A] \neq$ car $[A|b]$, passe a tautologia). Mais car (A) = car $[A|b]$=número de incógnitas sse é possível determinado e possível indeterminado sse car (A) = car $[A|b]$ $\neq$número de incógnitas

Exercício 1.15 *Prove que* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ *sempre que* $ad - cb \neq 0$.

Resolução: Aplique o método de Gauss-Jordan, $[A|\mathbf{1}] --> [\mathbf{1}|A^{-1}]$, verificando que car A=2 sse $ad - cb \neq 0$. Confronte com o exercício 1.7, alínea (b).

Exercício 1.16 *Sendo* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz* $n \times n$, *define-se o traço de* A, $tr(A)$, *como sendo a soma dos elementos da diagonal pincipal, i.e.* $tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.
(a) Prove que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ *e* $tr(A) = tr(A^T)$ *onde* A^T *designa a matriz transposta de* A
(b) Prove que $tr(AB) = tr(BA)$.
(c) Se $B = S^{-1}AS$ *para alguma matriz invertível* S, *então prove que* $tr(A) = tr(B)$.

Resolução: As alíneas (a) e (b) seguem directamente das definições. Use a alínea (b) para resolver (c).

Exercício 1.17 *Encontre matrizes* A *e* B *do tipo* 2×2 *reais, tais que* $AB \neq BA$. *Será que* $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ *para quaisquer matrizes* A *e* B*? Justifique.*

Resolução: Use, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.18 *Prove que* $\{A \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) : AB = BA$, *para qualquer* $B\} = \{aI : a \in \mathbb{R}\}$ *onde* I *denota a matriz identidade do tipo* 2×2. *Generalize para matrizes* $n \times n$.

Resolução: Dada uma matriz $A \in \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) : AB = BA$, para toda $B\}$ escrever as condições que provêm de $AB = BA$ quando fazemos $B \in \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$.

Exercício 1.19 *Seja* $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tal que* $A^k = 0$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$. *Prove que* $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

Exercício 1.20 *Sejam* A, B, C *matrizes* $n\times n$, *tais que* A *e* B *são invertíveis. Resolva a seguinte equação matricial em* X: $AXB = C$.

Resolução: Como A é invertível $A^{-1}A = I$ onde I designa a matriz identidade $n \times n$. Portanto multiplicando à esquerda por A^{-1} obtém-se

$$AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}C \Leftrightarrow IXB = A^{-1}C \Leftrightarrow XB = A^{-1}C.$$

De forma similar, multiplica-se à direita esta última equação por B^{-1} e conclui-se que $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Exercício 1.21 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 4 \\ -17 & -12 & -7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
(a) Verifique que A^3 *é a matriz nula. Prove que* A *não é invertível.*
(b) Calcule $(I + A + A^2)(I - A)$.

Resolução: Facilmente se calcula A^3 por definição de produto de matrizes. Supor que A é invertível, então como o produto de matrizes invertíveis é invertível, conluimos que A^2 e A^3 também são invertíveis. Mas A^3 não é invertível. Alternativelmente, verifique que car $(A) = 2 \neq 3$. Donde A não é invertível.

Exercício 1.22 *Seja A tal que* $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. *Calcule A.*

Resolução: Note que $(7A)^{-1} = C$ significa que $7^{-1}A^{-1} = C$, i.e. $A = 7^{-1}C^{-1}$. Neste caso concreto, $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.23 *Quando possível, inverter as seguintes matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Usando o método de Gauss-Jordan temos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Portanto A é invertível porque car $(A) = 2$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz B não é invertível pois car $(B) = 1 \neq 2$ assim como a matriz D para quaisquer valores dos parâmetros $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. A matriz C é invertível.

Exercício 1.24 *Aproveite a matriz A do exercício 1.23 para resolver o sistema* $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$.

Resolução: Como A é invertível, de $A\mathbf{x} = b$ obtém-se $\mathbf{x} = A^{-1}b$ multiplicando à esquerda por A^{-1}. Portanto pelo exercício 1.23

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2 Espaços Lineares (Vectoriais)

2.1 Subespaços lineares

Exercício 2.1 *Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são espaços lineares (considere as operações usuais de adição de vectores e multiplicação por escalares):*
(a) $\{(0, 0)\}$.
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$.
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \pi\}$.
(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = k\}$.

Resolução: Os subespaço lineares de $\mathbb{R}^2$ são as rectas que contêm a origem.

Exercício 2.2 *Considere o espaço linear* $V = \mathbb{R}^3$ *com as operações usuais. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^3$ *são subespaços lineares de* V*:*
(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$,
(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$,
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0, x - y = 0\}$,
(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d, kx + ly + mz = r\}$.

Exercício 2.3 *Seja* A *uma matriz real* $n \times m$*. Prove que* $V = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m : A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\}$ *é um subespaço linear de* $\mathbb{R}^m$ *(isto é: o conjunto das soluções de qualquer sistema homogéneo forma um espaço linear).*

Exercício 2.4 *Considere* V *o espaço linear das funções reais de variável real. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de* V *são subespaços lineares de* V*:*
(a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$,
(b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ diferenciável e } f'(x) = f(x)\}$ *onde* f' *designa a derivada de* f,
(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ contínua}\}$,
(d) $\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \text{ polinómino}\}$,
(e) $\mathcal{P}_n = \{p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i : \text{ grau de } p \leq n\}$,
(f) $\{p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i : \text{ grau } p = n\}$,
(g) $\{p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i : \text{ grau de } p \leq n \text{ e } p(1) = 0\}$.

Exercício 2.5 *Considere* V *o espaço linear das sucessões. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de* V *são subespaços lineares de* V*:*
(a) $\{(u_n) : u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\}$,
(b) $\{(u_n) : u_n \text{ é convergente}\}$,
(c) $\{(u_n) : u_n \to 0\}$,
(d) $\{(u_n) : u_n \to 1\}$,
(e) $\{(u_n) : u_n \text{ limitada}\}$,
(f) $\{(u_n) : u_n \text{ monótona}\}$.

Exercício 2.6 *Considere* $V = Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$ *os espaço linear das matrizes* $n \times m$*. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de* V *são subespaços lineares de* V*:*
(a) $\{\text{matrizes triagulares superiores}\}$,
(b) $\{X \in V : X \text{ é invertível}\}$,
(c) $\{X \in V : Tr(X) = 0\}$,
(d) $\{X \in V : X^T = X\}$ *onde* X^T *denota a transposta da matriz* X,
(e) $\{X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_2 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) : x_{12} = x_{22}\}$.

2.2 Vectores geradores

Exercício 2.7 *No espaço linear* $\mathbb{R}^3$ *considere os vectores* $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$ *e* $v_3 = (1,1,0)$. *Mostre que os seguintes vectores são combinação lineares de* v_1, v_2 *e* v_3*:*
(a) $v = (3,3,3)$ *(b)* $v = (2,1,5)$ *(c)* $v = (-1,2,0)$.

Exercício 2.8 *Determine o valor de* k *para o qual o vector* $v = (1,-2,k) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear dos vectores* $v_1 = (3,0,-2)$ *e* $v_2 = (2,-1,-5)$.

Exercício 2.9 *Considere, no espaço linear* $\mathcal{P}_2$ *dos polinómios de grau menou ou igual a 2, os vectores* $p_1(x) = 2 + x + 2x^2$, $p_2(x) = -2x + x^2$, $p_3(x) = 2 - 5x + 5x^2$ *e* $p_4(x) = -2 - 3x - x^2$. *O vector* $p(x) = 2 + x + x^2$ *pertence à expansão linear* $L(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$*? Podem* p_1, p_2, p_3 *e* p_4 *gerar* P_2*?*

Exercício 2.10 *Considere* $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *no espaço linear* V*=*$Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Prove que* $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *gera* V. *Escreva* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *como combinação linear de matrizes de* S.

2.3 Independência linear

Exercício 2.11 *Quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independente e dependentes:*
Em $\mathbb{R}^2$*:*
(a) $\{(1,1),(2,2)\}$,
(b) $\{(1,1),(1,2)\}$,
Em $\mathbb{R}^3$*:*
(c) $\{(2,-1,4),(3,6,2),(2,10,-4)\}$,
(d) $\{(6,0,-1),(1,1,4)\}$,
(e) $\{(4,4,0,0),(0,0,6,6),(-5,0,5,5)\}$.

Exercício 2.12 *Quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearente independente e dependentes:*
Em $\mathcal{P}_2$*:*
(a) $\{2 - x, 1 + x\}$,
(b) $\{1 + x, 1 + x^2, 1 + x + x^2\}$,
Em $\mathcal{P}_3$*:*
(c) $\{1 + x + x^3, 1 - x - x^2 + x^3, x^2\}$,
(d) $\{1, x, x^2, x^3\}$,
No espaço das funções reais de variável real:
(e) $\{\cos^2(t), \sin^2(t), 2\}$,
(f) $\{t, \cos(t)\}$,
Em $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$*:*
(g) $\{A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$.

Exercício 2.13 *(a) Seja* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *um conjunto de vectores linearmente independente de* $\mathbb{R}^n$ *e* $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ *uma matriz invertível. Prove que* $\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_n\}$ *também é um conjunto de vectores* *linearmente independente.*

(b) Sejam v_1, v_2 e v_3 vectores linearmente de $\mathbb{R}^3$. Prove que então $w_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $w_2 = 2v_2 + v_3$ e $w_3 = -v_1 + 3v_2 + 3v_3$ são vectores linearmente independentes.

2.4 Bases e dimensão de espaços lineares

Exercício 2.14 *(a) Encontre um conjunto de vectores S num espaço linear V tal que S gere V mas com os vectores de S linearmente dependentes.*

(b) Encontre um cojunto de vectores S num espaço linear V tal que S não gere V mas com os vectores de S linearmente independentes.

Exercício 2.15 *Indique uma base e respectiva dimensão para cada espaço linear:*

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x - y = 0\}$

c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, x - y = 0, y + w = 0\}$.

Exercício 2.16 *Considere $V = L(\{v_1, v_2, v_3\})$ onde $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 2, 2, 0)$. Encontre uma base para V e indique a respectiva dimensão.*

Exercício 2.17 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$. *Determine a dimensão dos seguintes espaços lineares, indicando uma base em cada caso:*

(a) Núcleo de A *(b) Espaço linhas de A* *(c) Espaço colunas de A.*

Exercício 2.18 *Encontre a característica, bases para o núcleo, espaço das linhas e das colunas das matrizes seguintes:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Para cada matriz A verifique que: dim Nuc(A)+ car(A)= número de colunas de A.

Exercício 2.19 *Prove que* $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *constituem uma base para o espaço linear $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Encontre as coordenadas de* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *na base canónica de $Mat_{2\times 2}$ e na base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.*

Exercício 2.20 *Encontre bases e respectivas dimensões para os seguintes espaços lineares:*

(a) $V = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\}$;

(b) $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(0) = p(1) = 0\}$;

(c) $V = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + 2b = 0\}$;
(d) $\{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\}$;
(e) $\{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A\}$.

Exercício 2.21 *Sejam* $E = L(\{(1,1,1),(1,2,2)\})$ *e* $F = L(\{(0,1,-1),(1,1,2)\})$.
(a) Determine a dimensão de $E + F$.
(b) Determine a dimensão de $E \cap F$.

Resolução: (a) Temos que $E + F = L(E \cup F) = L(\{(1,1,1),(1,2,2),(0,1,-1),(1,1,2)\})$.

Escrevendo as componentes destes vectores como linhas de uma matriz e usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos uma matriz de característica 3 pelo que a dimensão de $E + F$ é 3.

(b) Como os vectores $(1,1,1),(1,2,2)$ são linearmente independentes, por não serem múltiplos um do outro, a dimensão de E é 2. Analogamente se vê que a dimensão de F é 2. Dado que dim $E + F =$ dim $E+$ dim $F-$ dim $E \cap F$ e pela alínea anterior dim $E + F = 3$, temos que a dimensão de $E \cap F$ é 1.

Exercício 2.22 *Determine a dimensões de* $E \cap F$ *e* $E + F$*:*

(a) $E = L(\{(1,1,-1,-1),(1,1,1,1),(1,1,2,2)\})$ *e* $F = L(\{(1,0,0,1),(0,1,1,1),(1,1,0,1)\})$;

(b) $E = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0\}$ *e* $F = (\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + w = 0, y + w = 0\}$;

(c) $E = L(\{1 + x + x^2, 1 + x^2\})$ *e* $F = L(\{3 + 2x + 3x^2\})$ *em* $\mathcal{P}_2$.

2.5 Matriz mudança de base

Exercício 2.23 *(a) Seja* $BC = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *e* $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1), v_2 = (-1,0)\}$ *duas bases de* $\mathbb{R}^2$. *Encontre a matriz* S *mudança de base da base* BC *para a base* $\mathcal{B}$ *e a matriz* P *mudança de base da base* $\mathcal{B}$ *para a base* BC. *Quais são as coordenadas do vector* $v = (3,4)$ *na base* $\mathcal{B}$.
(b) Encontre as coordenadas do vector $v = (1,2,-3)$ *numa base do espaço linear* $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ *à sua escolha.*
(c) Qual é a matriz mudança de base S *da base canónica para a base* $\mathcal{B}$*? e a da* $\mathcal{B}$ *para a base canónica?*

3 Transformações Lineares

Exercício 3.1 *Sejam* E *e* F *espaços lineares e* $T : E \rightarrow F$ *uma transformação linear. Prove que então* T *transforma o vector nulo* $\mathbf{0}_E$ *de* E *no vector nulo* $\mathbf{0}_F$ *de* F*, i.e.* $T(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.

Exercício 3.2 *Determine quais das seguintes transformações são lineares:*
Em $\mathbb{R}^n$*:*
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x, y)$
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + 1, y)$
(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x, y^2)$
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + 2y + z, y - 3z, 0)$
(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (x, 2x + 3y, x + y)$
(f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (x, 2x + 3y, 1)$

Em $\mathcal{P}_n$ *na varável* x *e onde* P' *designa a derivada de* p*:*
(g) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $T(p)(x) = xp'(x) + p(x)$
(h) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$, $T(p)(x) = x^2p'(x) + p(x + 1)$
(i) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $T(p)(x) = xp'(x) + p(x)$
(j) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$, $T(p)(x) = p(-1) + p(0) + p(1)$
(l) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$, $T(p)(x) = p(0)p'(x)$

Em $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$*:*
(m) $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix} b + 2c & 0 \\ 3c + a & d - a \end{bmatrix}$
(n) $T : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $T(X) = X + X^t$
(o) $T : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $T(X) = SX$ *onde* S *é uma matriz fixa*
(p) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(p) = \begin{bmatrix} p(-1) & p(0) \\ p(0) & p(1) \end{bmatrix}$.

Exercício 3.3 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(1, 1) = (3, 3)$ *e* $T(1, -1) = (1, -1)$*. Calcule* $T(1, 0)$ *e* $T(0, 1)$ *e determine a expressão genérica* $T(x, y)$*.*

3.1 Representação matricial de transformações lineares

Exercício 3.4 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$*. Em cada alínea, determine a representação matricial* $M(T; B, B)$ *na base ordenada* $B = \{v_1, v_2\}$*:*
(a) $v_1 = (1, 0),\ v_2 = (0, 1)$
(b) $v_1 = (2, 0),\ v_2 = (0, 2)$
(c) $v_1 = (0, 1),\ v_2 = (1, 0)$
(d) $v_1 = (1, 1),\ v_2 = (1, -1)$.

Exercício 3.5 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (x + y, x + z, z + y)$*. Em cada alínea, determine a representação matricial* $M(T; B, B)$ *na base ordenada* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$*:*
(a) $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$
(b) $v_1 = (0, 3, 0), v_2 = (0, 0, 3), v_3 = (3, 0, 0)$
(a) $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)$

Exercício 3.6 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x, y, z) = (2x + y, z + 3y)$*. Em cada alínea, determine a representação matricial* $M(T; B_1, B_2)$ *nas bases ordenada* $B_1 = \{v_1, v_2\}$ *e*

$B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$:
(a) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1) \qquad w_1 = (1,0), w_2 = (0,1)$
(b) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1) \qquad w_1 = (1,0), w_2 = (0,1)$
(c) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1) \qquad w_1 = (1,1), w_2 = (0,1)$

Exercício 3.7 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que na base canónica é representada pela matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. *Calcule mediante uma matriz mudança de base apropriada:*
(a) a representação matricial de T *na base* $v_1 = (3,0), v_2 = (0,3)$
(b) a representação matricial de T *na base* $v_1 = (1,1), v_2 = (1,2)$

Exercício 3.8 *Encontre as representações matriciais das transformações lineares do exercício 3.2 nas bases canónicas.*

3.2 Transformações injectivas/sobrejectivas e bijectivas

Exercício 3.9 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que na base* $B = \{(1,1),(1,2)\}$ *é representada pela matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Calcule* $T(x,y)$ *e verifique se* T *é uma transformação injectiva ou sobrejectiva.*

Exercício 3.10 *Considere* $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $T(p)(x) = xp'(x) + p(x)$. *Encontre a matriz que representa* T *na base canónica de* $\mathcal{P}_2$, *i.e.* $\{1, x, x^2\}$. *Será* T *uma transformação invertível?*

Exercício 3.11 *Considere as transformações lineares do exercício 3.2.*
(a) Indique as que são injectivas ou sobrejectivas. Nos casos em que o espaços de partida e de chegada coincidem e a transformação for bijectiva, determine a transformação T^{-1} *inversa.*
(b) Se T *é não injectiva, então encontre uma base para o núcleo de* T.
(b) Se T *é não sobrejctiva, entre encontre uma base para o imagem de* T.

Exercício 3.12 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x,y,z) = (x+y, x+y-z).$$

(a) Calcule a matriz que representa T *nas bases canónicas.*
(b) Calcule uma base para o núcleo de T. *A transformação é injectiva?*
(c) Calcule uma base para a imagem de T. *Será* T *sobrejectiva?*
(d) Resolva a equação linear $T(x,y,z) = (1,1)$.
(e) Existe algum $a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tal que a equação* $T(x,y,z) = (a,b)$ *é impossível?*
(f) Existe algum $a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tal que a equação* $T(x,y,z) = (a,b)$ *é indeterminada?*

Exercício 3.13 *Decida o valor lógico das seguintes proposições:*
(a) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^8$ *para* $\mathbb{R}^6$.
(b) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^8$ *para* $\mathbb{R}^6$.
(c) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^6$ *para* $\mathbb{R}^8$.

(d) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^6$ *para* $\mathbb{R}^8$.

(e) Existem transformações lineares injectivas de $Mat_{2\times 2}$ *para* $\mathcal{P}_2$.

Exercício 3.14 *Seja* $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *matriz não nula e a transformação* $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(X) = tr(X)S$$

onde $tr(X)$ *designa o traço da matriz* X.

(a) Prove que T *é uma transformação linear.*

(b) Considere a base canónica $Bc = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ *de* $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Calcule a matriz que representa* T *nesta base.*

(c) Encontre uma base para o núcleo de T *e verifique se* T *é injectiva.*

(d) Encontre uma base para a imagem de T *e verifique se* T *é sobrejectiva.*

(e) Determine uma base de $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *cuja representação matricial de* T *nessa base seja uma matriz diagonal.*

(f) Qual é a matriz mudança de base da base conónica para a base da alínea anterior?

Exercício 3.15 *Seja* $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ *a transformação linear definida por*

$$(Tp)(x) = x^2 p''(x) - 2p(x).$$

(a) Calcule a matriz que representa T *na base canónica* $\{p_1, p_2, p_3\}$ *onde*

$$p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = x^2.$$

(b) Calcule uma base para o núcleo de T *e conclua que* T *não é injectiva nem sobrejectiva.*

(c) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, *a equação linear* $x^2 p''(x) - 2p(x) = 1$.

4 Determinante e Aplicações

Exercício 4.1 *Seja* A *uma matriz* $n \times n$ *e* B. *Decida se cada afirmação seguinte é verdadeira:*

(a) Seja B *a matriz que se obtém de* A *fazendo uma troca de linhas* $L_i \longleftrightarrow L_j$. *Então* $\det(A) = \det(B)$.

(b) Seja B *a matriz que se obtém de* A *multiplicando uma linha de* A *por um escalar não nulo* k. *Então* $\det(A) = \frac{1}{k}\det(B)$.

(c) Seja B *a matriz que se obtém de* A *substituindo a linha* L_i *de* A *por* $L_i + \alpha L_j$, *para qualquer escalar* α. *Então* $\det(A) = \det(B)$.

(d) Sendo A^t *a matriz transposta de* A, $\det(A) = \det(A^t)$.

(e) $det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Exercício 4.2 *Seja* $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ *tal que* $\det(A) = -5$. *Calcule*

(a) $\det(3A)$ *(b)* $\det(A^{-1})$ *(c)* $\det(-2A^{-1})$ *(d)* $\det((-2A)^{-1})$ *(e)* $\det(A^3)$ *(f)* $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

Exercício 4.3 *Mostre que* $\det \begin{bmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$ *para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Será que* A *é invertível para algum* $a, b, c \in \mathbb{R}$*?*

Exercício 4.4 *Para que valores de* k *a matriz* A *é singular?*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$ *(b)* $A = \begin{bmatrix} k-2 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$.

Exercício 4.5 *Use a Regra de Laplace para calcular os determinantes das matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.6 *(a) Calcule* $\det(A_x - \lambda I)$ *onde* $A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *onde* x *é um parâmetro real e* I *denota a matriz identidade do tipo* 4×4.

(b) Determine os valores de λ *(em função de* x*) para os quais* $A_x - \lambda I$ *é singular.*

(c) Para que valor (ou valores) de x *a matrix* A_x *é invertível?*

Exercício 4.7 *Seja* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tal que* $AA^T = I$.

(a) Prove que $\det(A) = \pm 1$.

(b) Encontre uma matriz A *tal que* $AA^T = I$ *e* $\det(A) = -1$.

Exercício 4.8 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\det(A)$ *e juistifique que* A *é invertível.*

(b) Escreva a matriz dos cofactores de A*, cof*(A).

(c) Use as alíneas anteriores para calcular a inversa de A.

Exercício 4.9 *Resolva os seguintes sistemas de equações lineares usando a regra de Cramer.*

(a) $\begin{cases} 7x - 2y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ *(b)* $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 2x - y \ \ = -2 \\ 4x \ \ - 3z = -2 \end{cases}$

(b) Sendo A *a matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema linear de (b), calcule a entrada-23 da matriz* A^{-1}.

5 Valores Próprios e Vectores Próprios

Exercício 5.1 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x + y).$$

Considere ainda os vectores $v_1 = (0, 0), v_2 = (2, 1), v_3 = (-1, 1), v_4 = (2, 3)$ *e* $v_5 = (2, 2)$. *Identifique os que são vectores próprios e* T. *Diga ainda quais são os valores próprios associados.*

Exercício 5.2 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (y, y, y).$$

Mostre que os vectores $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 1)$ *e* $v_3 = (0, 0, 1)$ *determinam um base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída por vectores próprios de* T. *Calcule a matriz que representa* T *nesta base.*

Exercício 5.3 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y) = (x + 2y, 3y).$$

(a) Calcule a matriz A *que representa* T *na base canónica de* T.
(b) Calcule o polinómia característico de T.
(c) calcule os espaço próprios e indique as respectivas dimensões.
(d) Prove que T *é diagonalizável e indique uma matriz* S *tal que* SAS^{-1} *é uma matriz diagonal.*
(e) Calcule T^9.

Exercício 5.4 *Considere a transformação linear* $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ *que na base* $\{1, x, x^2\}$ *é representada pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores e vectores prpríos de T.
(b) Diga, justificando, se existe alguma base de $\mathcal{P}_2$ *cuja representação matricial de* T *é uma matriz diagonal.*

Exercício 5.5 *Considere a transformação* T *no exercício 3.14, mas fixando* $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
(a) Encontre os valores e vectores próprios de T.
(b) Verifique se T *é diagonalizável.*

Exercício 5.6 *Seja* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *o polonómio característico de uma matriz real do tipo* $n \times n$ *e* $E(\lambda) = \mathrm{Nuc}(A - \lambda I)$. *Decida sobre o valor lógico das seguintes proposições:*
(a) Temos $p(\lambda) = 0$ *se e só se dim* $NucE(\lambda) \neq 0$.
(b) A matriz é invertível se e só se 0 e valor próprios de A.
(c) Se a matriz B *se obtém de* A *aplicando o método de Gauss, então os valores próprios de* A *e* B *coincidem.*
(d) Se A *é simétrica* $A = A^t$, *então é diagonalizável.*

(e) Se λ e μ são valores próprios distintos de A, u vector próprio associado ao valor próprio λ, v vector próprio associado ao valor próprio μ, então $u+v$ é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda+\mu$.
(f) O conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : \dim \mathrm{Nuc}(A-\lambda I) = 0\}$ é infinito.

Exercício 5.7 *(a) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, indicando uma matriz diagonal D e matriz mudança de base S tais que $D = SAS^{-1}$.*
(b) Encontre a única solução do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = x_1'(t) \\ -2x_1(t) + 5x_2(t) = x_2'(t) \end{cases}$$

com as condições $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$.

5.1 Alguns exercícios resolvidos

Exercício 5.8 *Determine todos os vectores e valores próprios da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.*

Resolução O polinómio característico de A é:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda,$$

pelo que os valores próprios de T (os mesmos que os de A) são $\{0, 5\}$. Resta-nos encontrar os vectores próprios associados a cada valor próprio. O espaço próprio $E(0)$ associado a valor próprio λ=0 é $E(0) = \mathrm{Nuc}(A - 0I) = \mathrm{Nuc}(A)$, cuja base é $\{(2, 1)\}$. Portanto os vectores próprios associados ao valor próprio λ=0 são $\{(2a, a)\}$ para qualquer escalar a não nulo.
Finalmente, o espaço próprio $E(5)$ associado ao valor próprio $\lambda = 5$ é

$$E(5) = \mathrm{Nuc}(A-5I) = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

cuja base é $\{(1, -2)\}$, donde $\{(b, -2b) : b \neq 0\}$ são os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 5$.

Exercício 5.9 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matriz invertível.*
(a) Prove que 0 não é valor próprio de A.
(b) Encontre os valores e vectores próprios de A^{-1} em função dos de A.

Resolução: (a) Comece por notar que, por definição, 0 é valor próprio de A sse 0 é raiz do polinómio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, i.e. $0 = p(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$. Pelo que 0 é valor próprio de A sse $\det A = 0$, ou seja sse A não é invertível. Conclusão: A invertível sse $p(0) \neq 0$.
(b) Seja λ valor próprio de A. Por (a), $\lambda \neq 0$. Vamos agora provar que $1/\lambda$ é valor próprio de A^{-1}. Usando propriedades dos determinantes temos:

$$\det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}I) = \det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(I - \frac{1}{\lambda}A) = \det(A^{-1})\det(\frac{1}{\lambda}\lambda I - \frac{1}{\lambda}A) =$$

$$\det(A^{-1})\det\Big(\frac{-1}{\lambda}(A-\lambda I)\Big) = \Big(\frac{-1}{\lambda}\Big)^n \det A^{-1}\det(A-\lambda I),$$

pelo que $\lambda^n \det(A)\det(A^{-1} - 1/\lambda I) = (-1)^n \det(A-\lambda I)$. Portanto λ é valor próprio de A sse $1/\lambda$ é valor próprio de A^{-1}.

Seja v um vector próprio de A associado a um valor próprio λ. Portanto $Av = \lambda v$ por definição. Aplicando a inversa de A em ambos os membros desta igualdade obtemos $A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v$, logo $v = \lambda A^{-1}v$. Portanto $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$. Assim concluimos que v também é vector próprio de A^{-1} associado ao valor próprio $1/\lambda$.

Exercício 5.10 *Prove que* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *não é diagonalizável.*

Resolução: O polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2,$$

pelo que A tem $\lambda = 2$ como único valor próprio (com multiplicidade algébrica dupla). O respectivo espaço próprio $E(2) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ cuja base é formada por um só vector $e_1 = (1,0)$. Como a multiplicidade geométrica deste valor próprio $\lambda = 2$ não é igual à sua multiplicidade algébrica, conclui-se de imediato que a matriz A não é diagonalizável.

Exercício 5.11 *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$, *seja* $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

(a) Encontre os valores próprios de A_α *e respectivas multiplicidades algébricas. Diga, quando* A_α *é invertível e nesse(s) caso(s), calcule os valores próprios de* A_α^{-1}.

(b) Determine base para cada espaço próprio $E(\lambda)$ *de* A_α.

(c) Prove que A_α *é diagonalizável para qualquer* α, *e encontre uma matriz mudança de base* S_α *e matriz diagonal* D_α *tal que* $A_\alpha = S_\alpha^{-1}D_\alpha S_\alpha$.

(d) Faça a alínea anterior usando a matriz A_α^{-1} *(sempre que* A_α^{-1} *exista).*

(e) Prove que $\langle u, v\rangle = uA_\alpha v^t$ *não mune* $\mathbb{R}^3$ *com um produto interno (para todo o* α*).*

Resolução: (a) O polinómio característico de A_α é (usando a regra de Laplace):

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{bmatrix} = \Big((1-\lambda)^2 - 4\Big)(\alpha-\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)(\alpha-\lambda),$$

pelo que os valores próprios de A_α são $\{-1, 3, \alpha\}$. As multiplicidades algébricas são todas simples, quando $\alpha \notin \{-1, 3\}$. Se $\alpha = -1$ a multiplicidade algébrica de $\lambda = -1$ é dois, e a de $\lambda = 3$ é um. No caso $\alpha = 3$, a multiplicidade algébrica de $\lambda = 3$ é dois, e a de $\lambda = -1$ é um.

A matriz A_α é invertível sse $\alpha \neq 0$, e os valores próprios de A^{-1} são $\{-1, 1/3, 1/\alpha\}$ (ver exercício 5.9).

(b) Caso $\alpha \notin \{-1, 3\}$:

- O espaço próprio associado a $\lambda = -1$ é $E(-1) = \mathrm{Nuc}(A - (-1)I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix}$.

Pelo que a base de $E(-1)$ é $\{(-1,1,0)\}$.

• O espaço próprio associado a $\lambda = 3$ é $E(3) = \text{Nuc}(A-3I) = \text{Nuc}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{bmatrix}$.

Portanto $\{(1,1,0)\}$ é uma base para $E(3)$.

• O espaço próprio associado a $\lambda = \alpha$ é $E(\alpha) = \text{Nuc}(A-\alpha I) = \text{Nuc}\begin{bmatrix} 1-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Logo $\{(0,0,1)\}$ é uma base para $E(\alpha)$.

Falta investigar dois casos singulares. No caso $\alpha = -1$, $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ forma uma base para $E(-1)$, enquanto $\{(1,1,0)\}$ forma uma base para $E(3)$. No caso $\alpha = 3$, $\{(-1,1,0)\}$ forma uma base para $E(-1)$, e $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ forma uma base para $E(3)$.

(c) A matriz A_α é diagonalizável para todo o α porque é simetrica $A_\alpha^T = A_\alpha$. (Alternativelmente, verifique que a multiplicidade algébrica e geométrica de cada valor próprio coincidem.)

Sendo $S_\alpha = M(id; B_{vp}, Bc)$ a matriz mudança de base, as colunas de S_α são formadas pelos vectores que provêm das bases dos espaços próprios, e as entrada na matriz diagonal D_α são os valores próprios correspondentes aos vectores próprios em S_α. Assim, e em todos os casos, $S_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Note que se A_α representa a transformação linear T_α na base canónica, S_α é a matriz mudança de base (da base formada por vectores próprios para a base canónica) e D_α representa T_α na base formada pelo vectores próprios (verifique!).

(d) A matriz é invertível sse $\alpha \neq 0$. Os valores próprios de A^{-1} são pelo exercício 5.9, $\{-1, 1/3, 1/\alpha\}$. As bases para os espaços próprios $E(-1)$, $E(1/3)$ e $E(1/\lambda)$ de A^{-1} coincidem (novamente pelo exercício 5.9) com as bases para os espaços próprios $E(-1)$, $E(3)$ e $E(\alpha)$ de A, respectivamente. Temos trivialmente $A_\alpha^{-1} = S_\alpha^{-1} D_\alpha^{-1} S_\alpha$, onde S_α e D_α são as matrizes calculadas em (c).

(e) Observe que A_α têm pelo menos um valor próprio negativo (para qualquer α)!

Exercício 5.12 *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $x(t) = \Big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\Big)$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$.

(a) Encontre a solução geral[2] *do sistema de equações diferencias* $x' = Ax$, *onde* $x'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$.

(b) Calcule a solução de $x'(t) = Ax(t)$ *que passa no ponto* $x(0) = (1,1,1)$.

Resolução: (a) • Comece por observar que A é simétrica, portanto A é diagonalizável. Vamos encontrar, em primeiro lugar, matriz mudança de base S e matriz diagonal D tais que $S^{-1}AS = D$.

[2]No caso geral de uma matriz A diagonalizável, para resolver o sistema de equações diferenciais $x' = Ax$, primeiro lugar encontra-se uma martiz mudança de base $S = M(id, B_{vp}, Bc)$ e matrix diagonal D (formada pelos vectores próprios de A) tais que $D = S^{-1}AS$. De uma forma equivalente, encontra-se a matriz mudança de base $P = M(id, Bc, B_{vp})$ tal que $D = PAP^{-1}$, uma vez que $P = S^{-1}$. Depois, usa-se a mudança de varável $y = S^{-1}x$ e resolve-se a o sistema de equações difereniais $y' = Dy$, cuja solução geral é $y(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \cdots, c_n e^{\lambda_n t})$ onde $\lambda_i, \cdots, \lambda_n$ são os valores próprios de A e $c_1, \cdots, c_n$ são constantes. Finalmente, a solução geral do sistema inicial $x' = Ax$ é $x = Sy$

O polinómio característico de A é $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$, pelo que os valores próprios de A são $\{0, 2\}$. O vector $(-1, 0, 1)$ forma uma base para $E(0)$, enquanto $(1, 0, 1), (0, 1, 0)$ fornecem uma base para o espaço próprio $E(2)$. Logo

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

• De seguida, vamos resolver o sistema de equações diferenciais $y' = Dy$. Como D é diagonal, a solução geral desta equação é imediata: $y(t) = (c_1e^{0t}, c_2e^{2t}, c_3e^{2t}) = (c_1, c_2e^{2t}, c_3e^{2t})$ com c_1, c_2, c_3 constantes.

• Finalmente, a solução geral de $x' = Ax$ obtém-se da de $y' = Dy$ da seguinte forma

$$x(t) = Sy(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 + c_3e^{2t} \\ c_2e^{2t} \\ c_1 + c_3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(b) Já vimos em (a) que a solução geral de $x' = Ax$ é $x(t) = (-c_1 + c_3e^{2t}, c_2e^{2t}, c_1 + c_3e^{2t})$. Falta-nos determinar os valores das constantes c_1, c_2, c_3, pelo que temos de usar a condição $x(0) = (1, 1, 1)$ da seguinte maneira:

$$(1, 1, 1) = x(0) = (-c_1 + c_3, c_2, c_1 + c_3)$$

donde $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 1$. Portanto $x_1(t) = e^{2t}$, $x_2(t) = e^{2t}$ e $x_3(t) = e^{2t}$.

Exercício 5.13 *No espaço dos polinómios reais de grau menor ou igual a 3, P_3, considere os vectores $v_1 = 1 + x^3$, $v_2 = 1 + x^2 + x$, $v_3 = x - x^3$, $v_4 = 1 - x$.*

(a) Verifique que $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de P_3.

(b) Sendo $T : P_3 \to P_3$ a transformação linear tal que

$$T(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4) = (y_1 + y_2)v_3 + (y_3 + y_4)v_1$$

determine a imagem, o núcleo e os subespaços próprios de T.

(c) Escreva a matriz C que representa T em relação à base $B_2 = (1, x, x^2, x^3)$ e diga justificando se C é diagonalizável.

(d) Resolva a equação $T(p(x)) = 3v_3$.

Resolução:

(a) Escrevendo as componentes destes vectores em relação à base $B_1 = (1, x, x^2, x^3)$ de P_3 como linhas de uma matriz e usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

concluímos que, dado que a dimensão do espaço das linhas da matriz é 4, também a expansão linear $L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ tem dimensão 4 (igual à dimensão de P_3), donde $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de P_3.

(b) Como $T(v_1) = v_3, T(v_2) = v_3, T(v_3) = v_1, T(v_4) = v_1$, a matriz que representa T em relação à base B (ou seja $M(T; B)$) é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O espaço de colunas desta matriz é $L(\{(0,0,1,0),(1,0,0,0)\})$, e logo $ImT = \{v \in P_3 : v_B \in \mathcal{C}(A)\} = L(\{v_3, v_1\})$. O núcleo de A é

$\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = 0 \text{ e } z+w = 0\} = \{(-y,y,-w,w) : y,w \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\})$, e logo

Nuc $T = \{v \in P_3 : v_B \in Nuc(A)\} = L(\{-v_1+v_2, -v_3+v_4\})$.

O polinómio característico $p(\lambda)$ de A é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-\lambda)\Big((-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}\Big) =$$

$= (-\lambda)(-\lambda^3+\lambda) = \lambda^2(\lambda^2-1) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)$. Logo os valores próprios de T são $0, 1, -1$.

O subespaço próprio associado a 0 é o núcleo de T, que já foi determinado.

Temos $A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

concluímos que

Nuc $(A-1I) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : -x+z = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } w = 0\} = \{(x,0,x,0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,1,0)\})$ donde o subespaço próprio de V associado a 1 é o subespaço $L(\{v_1+v_3\})$.

Temos $A + 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

concluímos que

Nuc $(A - 1I) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } w = 0\} = L(\{(-1, 0, 1, 0)\})$ donde o subespaço próprio de V associado a -1 é o subespaço $L(\{-v_1 + v_3\})$.

(c) Seja $G = M(id; B, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

A matriz G^{-1} é a matriz $M(id; B_2, B)$ e pode ser determinada (determine!) pelo método de Gauss-Jordan ou usando a matriz dos cofactores, i.e.

$$G^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $A = M(T; B)$ temos que $C = M(T; B_2) = GAG^{-1}$ (calcule C!).

Dado que, pelas alíneas anteriores, sabemos que a soma das dimensões dos subespaços próprios de T é 4, a transformação T é diagonalizável ou seja P_3 admite uma base B_3 constituída por vectores próprios de T. A matriz D de T em relação a esta base é diagonal e C é semelhante a D, por representar T em relação a outra base de P_3. Logo C é diagonalizável.

(d) As soluções da equação $T(p(x)) = 3v_3$ são exactamente os elementos da imagem completa inversa $T^{-1}(v_3)$. Sabemos que $T(v_1) = v_3$ pelo que $T(3v_1) = 3v_3$ e logo as soluções da equação dada são os elementos de $3v_1 + NucT$. Se quisermos descrever em extensão este conjunto obtemos $3v_1 + NucT = \{(3 - a)v_1 + av_2 - bv_3 + bv_4 : a, b \in \mathbb{R}\}$, dado que

Nuc $T = L(\{-v_1 + v_2, -v_3 + v_4\}) = \{-av_1 + av_2 - bv_3 + bv_4 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Ideia para uma resolução alternativa: As coordenadas do vector $3v_3$ em relação à base B são $(0, 0, 3, 0)$ e logo

$T^{-1}(v_3) = \{v \in V : v_B \text{ é solução de } AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. Resolvendo este sistema obtemos o conjunto das soluções pretendido.

6 Produtos Internos

Exercício 6.1 *Identifique as aplicações* $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *que definem um produto interno,*

Em $\mathbb{R}^2$*:*

(a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$.

(b) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$.

(c) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1y_1 + 3x_2y_2$.

(d) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_2y_1y_2 + x_1y_2$.

Em $\mathbb{R}^3$*:*

(e) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

(f) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3$.

(g) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_3 x_1 y_2 + x_1 y_2$.

Exercício 6.2 *Determine um produto interno de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $\langle (1,0), (0,1) \rangle = 2$. *Será único?*

Exercício 6.3 *No espaço linear* $E = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *mostre que*

$$\langle A, B \rangle = tr(AB^t)$$

define um produto interno em E.

6.1 Complemento, projecções e bases ortogonais

Exercício 6.4 *Seja* E *um espaço Euclideano de dimensão finita e* $F = L(\{u_1, \cdots, u_k\})$.
(a) Prove que o complemento ortogonal $F^\perp = \{u \in E : \langle u, u_1 \rangle = 0, \langle u, u_2 \rangle = 0, \cdots, \langle u, u_k \rangle = 0\}$.
(b) Conclua que se considerarmos o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ *e* A *a matriz* $k \times n$ *cujas linhas são formadas pelos vectores* $u_1, \cdots, u_k$, *então* $F^\perp = \mathrm{Nuc}A$. *Em particular* $F^{\perp\perp} = \mathcal{L}(A)$.

Exercício 6.5 *Considere* $\mathbb{R}^3$ *munido com o produto interno usual e* $F = L(\{u_1\})$ *onde* $u_1 = (1,1,1)$.
(a) Calcule uma base ortonormada para F.
(b) Calcule uma base para o complemento ortogonal $F^\perp$ *de* F.
(c) Calcule uma base ortgonormal para o complemento ortogonal de F, *i.e. base ortogonarmal para* $F^\perp$.

Exercício 6.6 *Considere* $\mathbb{R}^3$ *munido com o produto interno usual e* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.
(a) Calcule uma base ortonormada para F.
(b) Calcule uma base para o complemento ortogonal $F^\perp$ *de* F.
(c) Calcule uma base ortogonormal para o complemento ortogonal de F, *i.e. base ortogonrmal para* $F^\perp$.

Exercício 6.7 *Considere* $\mathbb{R}^4$ *munido com o produto interno usual e* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0\}$.
(a) Calcule uma base ortogonal para $F^\perp$.
(b) Determine a projecção ortogonal de $p = (1,1,1,1)$ *sobre* F *e* $F^\perp$.
(c) Calcule $\mathrm{dist}(p, F)$ *e* $\mathrm{dist}(p, F^\perp)$.

Exercício 6.8 *Considere em* $\mathbb{R}^4$ *o produto interno usual.*
(a) Determine uma base para o complemento ortogonal $E^\perp$ *de* $E = L(\{(1,0,0,0), (1,0,0,1)\})$. *E uma base ortogonal para* $E^\perp$.
(b) Determine uma base para o complemento ortogonal de $E = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
(c) Calcule o ângulo entre $v = (1,1,1,1)$ *e* $w = (1,0,0,0)$.

Exercício 6.9 *Em* $\mathcal{P}_2$, *considere a a seguinte aplicação* $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p'(0)q'(0),$$

(a) Prove que esta aplicação define um produto interno em $\mathcal{P}_2$.
(b) Calcule $||p(x)||$ *para um qualquer polinómio de* $\mathcal{P}_2$.
(c) Calcule o ângulo entre os polinómios $p(x) = 1$ *e* $q(x) = 2 + x^2$.
(d) Encontre uma base para o complemento ortogonal $E^\perp$ *de* $E = L(\{p_1(x)\})$ *onde* $p_1(x) = 1 + x^2$.

Calcule a distância de $p(x) = 1$ a E e a $E^\perp$.

(e) Escrevendo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, encontre uma matriz simétrica A tal que: $\langle p(x), q(x)\rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

Exercício 6.10 *No espaço linear $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considere o produto interno*

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^t),$$

e o subespaço linear $F = \{\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ x + w = 0, \ y - z = 0\}$.

(a) Encontre uma base para F.

(b) Encontre uma base para $F^\perp$.

(c) Calcule $\mathrm{dist}(A, F)$ *onde* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 6.11 *Decida sobre o valor lógico das seguintes proposições:*

(a) Existem produtos internos em $\mathbb{R}^2$ que satisfazem $||(1, 0)|| = 0$.

(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe um produto interno em $\mathbb{R}^2$ tal que $||(1, 0)|| = a$.

(c) O ângulo entre $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ é $\pi/2$ para qualquer produto interno.

(d) Seja E um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$. Então $\mathrm{dist}(\mathbf{0}, E) = \mathrm{dist}(\mathbf{0}, E^\perp) = 0$, *para qualquer produto interno.*

(e) O $\mathbf{0}$ é o único ponto de $\mathbb{R}^n$ que satisfaz $\mathrm{dist}(\mathbf{0}, E) = \mathrm{dist}(\mathbf{0}, E^\perp) = 0$.

(f) Se $E \subseteq F$ então $F^\perp \subseteq E^\perp$.

(g) Para qualquer subespaço linear E do espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$ temos que $E^\perp \subseteq \{\mathbf{0}\}^\perp$.

(h) Usando o produto interno usual se $F = \mathrm{Nuc}(A)$, *então* $F^\perp = \mathcal{L}(A)$.

6.2 Alguns exercícios resolvidos

Exercício 6.12 *Em $\mathbb{R}^3$, considere o seguinte produto interno:*

$$\langle (x, y, z), (a, b, c)\rangle = 2xa + xb + ya + yb + zc$$

o qual se fixa em <u>todas</u> as alíneas que se seguem.

(a) Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é de facto um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(b) Encontre uma base ortogonal para $E = L(\{e_1, e_2\})$ onde $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$.

(c) Determine uma base para o complemento ortogonal $E^\perp$. Verifique que dim(E) + dim($E^\perp$)=dim$\mathbb{R}^3$.

(d) Encontre a representação matricial da projecção ortogonal $P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na base canónica. Qual é a representação matricial de $P_{E^\perp}$?

(e) Calcule o ponto de E mais próximo de $e_3 = (0, 0, 1)$.

(f) Calcule a distância de $v = (2, 0, 1)$ a $E^\perp$.

Resolução (a) Sejam $u = (x, y, z), u' = (x', y', z'), v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O axioma da simetria verifica-se porque $\langle u, v\rangle = 2xa + xb + ya + yb + zc = 2ax + bx + ay + by + cz = \langle v, u\rangle$. Por outro lado,

$$\langle \lambda u + u', v\rangle = 2(\lambda x + x')a + (\lambda x + x')b + (\lambda y + y')a + (\lambda y + y')b + (\lambda z + z')c = \lambda\langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$$

pelo que o axioma da linearidade é verificado. Finalmente, falta provar o axioma da positividade, i.e. $\langle u,u\rangle \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$ e $\langle u,u\rangle = 0$ sse $u = (0,0,0)$. Para esse fim, é suficiente observar que $\langle u,u\rangle = 2x^2+2xy+y^2+z^2 = x^2+(x+y)^2+z^2$.

Resolução alternativa de (a): comece por notar que $\langle u,v\rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
pelo que a simetria e a linearidade são óbvias. Para provar a positividade, é suficiente aplicar o critério: $A = A^t$, $\det[2] > 0$, $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0$ e $\det A > 0$
(ou então verifique que os valores próprios de A são <u>todos</u> positivos).

(b) Note, em primeiro lugar, que $\{e_1, e_2\}$ é uma base de E. Aplicamos de seguida o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter a base ortogonal $\{w_1, w_2\}$:
$w_1 = e_1$
$w_2 = e_2 - \frac{\langle e_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle} w_1 = e_2 - \frac{1}{2}e_1 = (\frac{-1}{2},1,0)$.

(c) Por definição $E^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 : \langle u,e\rangle = 0, \text{ para todo o } e \in E\}$. Como e_1, e_2 geram E,

$$E^\perp = \{u = (x,y,z) :\ \langle u,e_1\rangle = 0 = \langle u,e_2\rangle\} = \{u \in \mathbb{R}^3 : 2x+y = 0 = x+y\} = \text{Nuc}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde $e_3 = (0,0,1)$ base (ortogonal) de $E^\perp$.

(d) Note que $P_{E^\perp}(e_1) = (0,0,0) = P_{E^\perp}(e_2)$ porque e_1, e_2 pertencem a $(E^\perp)^\perp = E$. Mais, $P_{E^\perp}(e_3) = e_3$ porque $e_3 \in E^\perp$. Logo a matriz $\mathcal{P}_{E^\perp}$ que representa $P_{E^\perp}$ é $\mathcal{P}_{E^\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como $P_E + P_{E^\perp} = I$, a matriz $\mathcal{P}_E$ que representa P_E na base canónica é $\mathcal{P}_E = I - \mathcal{P}_{E^\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) O ponto de E mais próximo de $e_3 = (0,0,1)$ é dado por $P_E(e_3)$. Por (d), $\mathcal{P}_E(e_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Donde $P_E(e_3) = (0,0,0)$. Ou então, como $e_3 \in E^\perp$, $P_{E^\perp}(e_3) = e_3, P_E(e_3) = (0,0,0)$.

(f) A distância é dada por

$$\text{dist}(v, E^\perp) = ||P_E(v)|| = ||(2,0,0)|| = \sqrt{\langle (2,0,0),(2,0,0)\rangle} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Exercício 6.13 *Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual e sejam $E{=}L((1,0,0,1),(0,1,1,1))$, $F{=}L((1,0,0,1))$.*
(a) Será que $E^\perp \subseteq F^\perp$? Calcule dim$E$, dim$E^\perp$, dim$F$ e dim$F^\perp$.
(b) Determine base ortogonal para E.
(c) Determine base ortogonal para $E^\perp$ (o complemento ortogonal de E).
(d) Calcule a distância de $p = (1,1,0,0)$ a F.
(e) Encontre as equações cartesianas da recta $\mathcal{R}$ paralela a F que passa no ponto $p = (1,1,0,0)$.
(f) Encontre as equações do 2-plano $\mathcal{P}$ que passa no ponto $p = (1,1,0,0)$ e é perpendicular a E.
(g) Encontre a matriz que representa $P_{F^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ na base canónica. Verifique que $P_{F^\perp} \circ P_{F^\perp} = P_{F^\perp}$.

Resolução (a) Sim, porque $F \subset E$. Temos que $\dim E = \dim E^\perp = 2$, $\dim F = 1$ e $\dim F^\perp = 3$.
(b) Sendo $v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (0,1,1,1)$ base para E, vamos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Scmidt para obter uma base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ para E:
$w_1 = v_1 = (1,0,0,1)$
$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (\frac{-1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2})$.
(c) Em primeiro lugar temos que encontrar uma base $\{s_1, s_2\}$ de $E^\perp$, e de seguida apelar ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal $\{t_1, t_2\}$ de $E^\perp$.

Como v_1, v_2 geram E,

$$E^\perp = \{u = (x,y,z,w) : \langle u, v_1\rangle = 0 = \langle u, v_2\rangle\} = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja base é $s_1 = (-1,-1,0,1)$ e $s_2 = (0,-1,1,0)$. Finalmente, aplicando Gram-Schmidt:
$t_1 = s_1 = (-1,-1,0,1)$
$t_2 = s_2 - \frac{\langle s_2, t_1\rangle}{\langle t_1, t_1\rangle} t_1 = (0,-1,1,0) - \frac{1}{3}(-1,-1,0,1) = (\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, 1, \frac{-1}{3})$.
(d) A distância de p a F é $\mathrm{dist}(p,F) = ||P_{F^\perp}(p)||$. Agora ou se usa uma base ortonormada $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $F^\perp$ e então[3] $P_{F^\perp}(p) = \langle p, u_1\rangle u_1 + \langle p, u_2\rangle u_2 + \langle p, u_3\rangle u_3$, ou se usa o facto de $P_F + P_{F^\perp} = I$, i.e.

$$P_{F^\perp}(p) = p - P_F(p) = p - \frac{\langle p, (1,0,0,1)\rangle}{\langle (1,0,0,1), (1,0,0,1)\rangle}(1,0,0,1) = (\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{-1}{2}).$$

Portanto $\mathrm{dist}(p,F) = \sqrt{6}/2$.
(e) Primeiro vamos encontrar uma base para $F^\perp$. Como estamos a usar o produto usual de $\mathbb{R}^4$, temos que $F^\perp = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, cuja base é $\{(-1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$. Donde $F = \{(x,y,z,w) : -x+w = 0, y = 0, z = 0\}$. Como a recta $\mathcal{R}$ é paralela a F, as equações de $\mathcal{R}$ obtêm-se das de F impondo a condição $p \in \mathcal{R}$ (originando eventualmente equações não homogénias). Facilmente se constata que as equações cartesianas de $\mathcal{R}$ são: $-x+w = -1, y = 1, z = 0$.
Note que $F = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
(f) Vimos em (b) que $\{(1,0,0,1), (0,1,1,1)\}$ é uma base de E, pelo que as equações cartesianas de $E^\perp$ são: $x + w = 0, y + z + w = 0$. Como o 2-plano $\mathcal{P}$ é paralelo a $E^\perp$ e $p \in \mathcal{P}$, concluimos que as equações cartesianas de $\mathcal{P}$ são: $x + w = 1, y + z + w = 1$.
(g) Como $\dim F$ é menor que $\dim F^\perp$, vamos encontrar a matriz que representa P_F e depois usa-se o facto de $P_{F^\perp} = I - P_F$. Sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, $P_F(e_i) = \frac{\langle e_i, (1,0,0,1)\rangle}{\langle (1,0,0,1),(1,0,0,1)\rangle}(1,0,0,1)$, com $i = 1,2,3,4$. Pelo que

$$P_F(e_1) = (1/2,0,0,1/2),\ P_F(e_2) = (0,0,0,0),\ P_F(e_3) = (0,0,0,0),\ P_F(e_4) = (1/2,0,0,1/2).$$

Pelo que a matriz que representa $P_{F^\perp}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

[3] Recorde que dada uma base *ortonormada* $\{u_i\}$ de um espaço E, $P_E(w) = \sum_i \langle w, u_i\rangle u_i$. De forma similar, dada uma base *ortonormada* $\{v_j\}$ de $E^\perp$, $P_{E^\perp}(w) = \sum_j \langle w, v_j\rangle v_j$. Mais: $P_E(w) + P_{E^\perp}(w) = w$ para todo o vector w.

Exercício 6.14 *Seja E um espaço Euclideano de dimensão n, F um subespaço linear de E, $P_F : E \to E$ a projecção ortogonal sobre F e $\mathcal{P}_F$ a matriz que representa P_F numa base de E.*
(a) Prove que o conjunto dos valores próprios de P_F é um subconjunto de $\{0, 1\}$.
(b) Será $\mathcal{P}_F$ diagonalizável?

Resolução: Se $F{=}E$ ou $F{=}\{0_E\}$ o exercício é trivial. Para fazer os outros casos observe que se λ é valor próprio de P_F então λ^2 também é valor próprio de P_F^2. De seguida use o facto de $P_F^2{=}P_F$. Finalmente $\mathcal{P}_F$ é diagonalizável, tomando, p. ex., a base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_{F^\perp}$ de E, onde $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_{F^\perp}$) é uma base de F (resp. $F^\perp$). Indique então S e D tais que $S^{-1}\mathcal{P}_F S = D$, com D matriz diagonal.

Exercício 6.15 *Prove que a distância de um ponto (x_0, y_0, z_0) ao plano $\mathcal{P}_d$ de equação $ax + by + cz = d$ é*

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}.$$

Resolução: O plano $\mathcal{P}_0$ que passa na origem $(0, 0, 0)$ e é paralelo a $\mathcal{P}_d$ tem equação cartesiana dada por $ax+by+cz = 0$. Por outro lado $\{(a, b, c)\}$ é uma base para o complemento ortogonal $\mathcal{P}_0^\perp$ e $(0, 0, d/c) \in \mathcal{P}_d$ se $c \neq 0$. Note que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, pelo que se $b \neq 0$, podemos usar o ponto $(0, d/b, 0) \in \mathcal{P}_d$, ou ainda $(a/d, 0, 0) \in \mathcal{P}_d$ se $a \neq 0$. Portanto (denotando por $P_{\mathcal{P}_0^\perp}$ a projecção ortogonal sobre $\mathcal{P}_0^\perp$) temos

$$\operatorname{dist}\Big((x_0, y_0, z_0), \mathcal{P}_d\Big) = ||P_{\mathcal{P}_0^\perp}((x_0, y_0, z_0) - (0, 0, d/c))|| = ||\frac{\langle (x_0, y_0, z_0 - d/c), (a, b, c)\rangle}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c)||$$

donde o resultado.

6.3 Formas quadráticas

Exercício 6.16 *Classificar as seguintes formas quadráticas, em definids positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas ou indefinidas:*
(a) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
(b) $Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$.
(c) $Q(x, y) = -3x^2 + 2yx - 2y^2$.
(d) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4yx$.
(e) $Q(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$*, onde α é um parâmetro.*

Exercício 6.17 *Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$. Prove que A^2 é definida positiva se e só se A for invertível (não singular).*