Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2024/2025
10 de Janeiro de 2025
(duração 45 minutos)

3º MAP DE ÁLGEBRA LINEAR – LEAer

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1. Seja $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja representação matricial é $A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{B}_1 = \{1+t, 1+2t, t+t^2, t^3\} \text{ e } \mathcal{B}_2 = \{(1,1), (1,-1)\}.$$

   (a) (3.0) Calcule $T(2+3t)$.

   (b) (3.0) Encontre uma base para núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T e verifique se T é sobrejectiva.

   (c) (3.0) Resolva, em $\mathcal{P}_3$, a equação linear $T(p(t)) = (4,0)$.

   (d) (2.0) Verifique se a distância $d((2,2), \mathcal{I}(T))$ entre $(2,2)$ e $\mathcal{I}(T)$ depende do produto interno.

2. (5.0) Encontre uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

3. (2.0) Seja $N \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $N^3 = \mathbf{0}$. Considere $T : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = X - NX$. Verifique se T é uma transformação linear bijectiva.

4. (2.0) Sejam A e B matrizes $n \times n$ simétricas tais que A e $AB + BA$ são definidas positivas. Mostre que B é definida positiva.

FIM