Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2024/2025
26 de Novembro de 2024
(duração 45 minutos)

2º MAP DE ÁLGEBRA LINEAR – LEAer

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1. Considere os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = L(\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(0,-1,1,0),(1,1,-2,0)\}) \text{ e } V_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0\}.$$

   (a) (5.0) Determine uma base para V_1 e verifique se $V_1 \subset V_2$.

   (b) (3.0) Encontre uma base para $V_1 + V_2$ e indique $\dim(V_1 \cap V_2)$.

   (c) (2.0) Encontre as coordenadas do vector $(2,-2,0,0)$ numa base de V_1 à sua escolha.

2. (5.0) Seja $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Encontre J em forma canónica de Jordan e S invertível tais que $A=SJS^{-1}$.

3. (1.0) Sejam A e B matrizes 3×3. Encontre uma matriz K tal que $\mathcal{C}(A)+\mathcal{C}(B)=\mathcal{C}(K)$.

4. (2.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com $\mathrm{tr}(A)=1$ e $\mathrm{car}(A^T)=1$. Encontre o polinómio característico de A.

5. (2.0) Seja $S=\{v_1,..,v_k\}$ um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{N}(A)\cap L(S)=\{0\}$. Mostre que $\{Av_1,..,Av_k\}$ é linearmente independente.

FIM