Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2024/2025
8 de Outubro de 2024
(duração 45 minutos)

1º MAP DE ÁLGEBRA LINEAR – LEAer

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações lineares $A\mathtt{x}{=}b$ cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   (a) (3.0) Discuta o tipo de solução do sistema linear $A\mathtt{x} = b$ em função de α.

   (b) (2.0) Para $\alpha = 0$, encontre o conjunto solução do sistema linear $A\mathtt{x} = b$.

2. (5.0) Determine, caso existam, todas as matrizes A tais que

$$A\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^3 + \det\left(-\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}^{-1}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (5.0) Calcule a entrada $(4,3)$ de A^{-1} onde $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4. (1.0) Sejam $\mathtt{u}{=}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathtt{v}{=}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $b{=}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$. Seja A uma matriz tal que $\mathtt{u}$ é solução do sistema linear $A\mathtt{x} = b$ e $\mathtt{v} \in \mathcal{N}(A)$. Encontre uma solução de $A\mathtt{x} = b$ diferente de $\mathtt{u}$.

5. (2.0) Encontre, caso existam, as matrizes simétricas A (isto é, $A = A^T$) tais que $(1,0,0) \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(A^2)$ e $\operatorname{car}(A) = 1$.

6. (2.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AA^T = A^2$. Mostre que A é simétrica.

FIM