1º Semestre 2024/2025
10 de Janeiro de 2025
(duração 45 minutos)

Resolução do 3º MAP de ÁLGEBRA LINEAR

1. (a) $T(2+3t) = T(1+t) + T(1+2t) = 1(1,1) + 1(1,-1) + 1(1,1) + 1(1,-1) = (2,2)$.

   (b) Como $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0)\}$ é uma base $\mathcal{N}(A)$, pelo que $\{t,-1+t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois $(t)_{\mathcal{B}_1} = (-1,1,0,0)$ e $(-1+t^2)_{\mathcal{B}_1} = (-1,0,1,0)$. Como $\mathrm{car}(A) = 2$, temos que $\dim \mathcal{I}(T) = 2$, pelo que $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$ pelo que T é sobrejectiva.

   (c) Como $T(t^3) = (2,0)$, então $2t^3$ é uma solução de $T(p) = (4,0)$. Usando a base de $\mathcal{N}(T)$ obtida em b) temos: $\{p \in \mathcal{P}_3 : T(p) = (4,0)\} = \{2t^3 + c_1 t + c_2(-1+t^2) : \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.

   (d) Como $(2,2) \in \mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, $d((2,2),\mathcal{I}(T)) = 0$, que é independente do produto interno.

2. $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, logo $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $V = I$. As colunas de U são $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{8}}{4} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{8}}{4} \end{bmatrix}$ e $u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. O 3ª coluna u_3 de U é uma base ortonormada de $\mathcal{N}(A^T)$, p.ex. $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)$.

   Assim uma decomposição SVD de A é: $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. A aplicação T é uma transformação linear pois $T(X+\alpha Y) = (X+\alpha Y) - N(X+\alpha Y) = T(X) + \alpha T(Y)$ com α escalar e X, Y matrizes. Seja $X \in \mathcal{N}(T)$, então $X - NX = 0$, logo $X = NX$ mas então $X = NX = N^2X = N^3X = 0$, pelo que T é injectiva. Como os espaços de partido e de chegada têm a mesma dimensão, T injectiva sse T sobrejectiva. Logo T é uma transformação linear sobrejectiva, pelo que T é bijectiva.

4. Seja $C = AB + BA$ então $A^{-\frac{1}{2}} C A^{-\frac{1}{2}}$ é definida positiva e $A^{-\frac{1}{2}} C A^{-\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} + A^{-\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} = K + K^T$ onde $K = A^{\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$. Falta então ver que os valores próprios de K são estritamente positivos (pois K é semelhante a B e assim a matriz simétrica B vai ter somente valores próprios positivos e portanto B definida positiva). Se $u \neq 0$ é tal que $Ku = \lambda u$ então $u^T K^T = \lambda u^T$ (usando a transposta), logo $u^T(K+K^T)u = \lambda u^T u = \lambda ||u||^2$ pelo que $\lambda > 0$ pois $K + K^T$ é definida positiva.