Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2024/2025
26 de Novembro de 2024
(duração 45 minutos)

Resolução 2º MAP de ÁLGEBRA LINEAR

1. Usando operações elementares temos:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Como $V_1 = \mathcal{C}(A)$ podemos concluir que $\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0)\}$ é uma base de V_1. Dado que cada vector desta base de V_1 verifica a equação cartesiana de V_2, podemos conlcuir que $V_1 \subset V_2$.

(b) Como $V_1 \subset V_2$, $V_1 + V_2 = V_2$. Como $V_2 = \{(-y-z-w, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{R}\}$ e $(-y-z-w, y, z, w) = y(-1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+w(-1,0,0,1)$ e dim(V_2)=3, podemos então obter uma base de V_1+V_2, por exemplo $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$. Dado que $V_1 \subset V_2$, então $V_1 \cap V_2 = V_1$ pelo que $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$.

(c) Considerando a base $\mathcal{B}$ de V_1 encontrada em a), pretendemos encontrar a, b tais que $a(1,-1,0,0) + b(1,0,-1,0) + b(2,-2,0,0) = v$, cuja solução é $a = 2$ e $b = 0$, i.e. $v_{\mathcal{B}} = (2,0)$.

2. Como $p(\lambda) = (5-\lambda)^4$, $\lambda_1 = 5$ é o único valor próprio de A com $\mathrm{ma}(\lambda_1) = 4$ e $\mathrm{mg}(\lambda_1) = \dim\mathcal{N}(A-5I) = 3$.

Assim, a matriz J vai ter 3 blocos de Jordan associados a λ_1. Logo $J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Para determinar as colunas de S tais que $A = SJS^{-1}$, vamos encontrar uma base de $E(\lambda_1)$ e em seguida fixar $v_2 \notin E(\lambda_1)$ (que será a 2ª coluna de S) e depois calcular $v_1 = Av_2$. Finalmente consideramos vectores pp u e w de A tais que que $\{Av_2, v_2, u, v\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^4$. Ora $E(\lambda_1) = \{(x,y,z,w) : z + 2w = 0\}$ cuja base é $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,2,-1)\}$. Por exemplo, $v_2 = (0,0,1,2)$ satisfaz as condições requeridas, portanto

$$(A-5I)[v_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

satisfazem as condições requeridas. Obtemos a matriz $S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (que é invertível) tal que $A = SJS^{-1}$.

3. Basta definir $K = [A \;\; B]$ (matriz por blocos) e o resto segue pelas definições de espaço colunas e de soma.

4. Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A^T) = 1$, $\dim \mathcal{N}(A) = 2$, portanto $\lambda_1 = 0$ é um zero duplo. Por outro lado $\mathrm{tr}(A) = 1$ imploca que o outro zero é $\lambda_2 = 1$. Conclusão: $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 1)$.

5. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $\alpha_1(Av_1) + \ldots + \alpha_k(Av_k) = \mathbf{0}$. Assim $A(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = \mathbf{0}$, isto é, $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \in \mathcal{N}(A) \cap L(S)$. Logo $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}$. Como os vectores são L.I., podemos concluir que os escalares são todos nulos.