Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2024/2025
8 de Outubro de 2024
(duração 45 minutos)

Resolução 1º MAP de ÁLGEBRA LINEAR

1. Usando operações elementares temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\alpha L_1 + L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

(a) Assim, o sistema linear é indeterminado para $\alpha \neq \pm 1$. Para $\alpha = \pm 1$, o sistema é impossível.

(b) Para $\alpha = 0$, w é a variável livre e assim $\mathcal{S} = \{(0,1,2,w) \in \mathbb{R}^4 : w \in \mathbb{R}\}$.

2. Temos $\det\left(-\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}^{-1}\right) = (-1)^3 \det \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = -1.$

Como $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a equação é equivalente a $A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, logo,
$A = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Temos $(A^{-1})_{(4,3)} = \frac{(-1)^{3+4}\det(A_{3,4})}{\det A} = \dfrac{-\det \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}} = \dfrac{-\det \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}}{-5 \det \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{1}{5}.$

4. Como $A\mathtt{u}=b$ e $A\mathtt{v}=0$ então $A(\mathtt{u}+\alpha\mathtt{v})=b$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, pelo que, p. ex., $\mathtt{u}+\mathtt{v}=(4,4,4)$ é uma tal solução.

5. Note que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(A^2) = \mathcal{N}(A)$ pois $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^2)$. Como A é simétrica e $(1,0,0) \in \mathcal{N}(A)$, então $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{bmatrix}$. Por outro lado, $\mathrm{car}(A) = 1$ significa que, p.ex., a linha 3 é multipla da 2ª, logo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & ka \\ 0 & ka & k^2a \end{bmatrix}$ com $0 \neq a,\ k \in \mathbb{R}$ (pois $b = ka$ e $c = kb$ logo $c = k^2a$). O caso da 2ª linha ser multipla da 3ª é análogo, obtendo-se $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2b & kb \\ 0 & kb & b \end{bmatrix}$ com $b \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}$.

6. Em primeiro lugar, se X é uma matriz real então $\mathrm{tr}(XX^t) = 0$ sse $X = 0$. Considerando $X=A-A^T$ obtemos:

$$\mathrm{tr}((A-A^T)(A-A^T)^T) = \mathrm{tr}((A-A^T)(A^T-A)) = \mathrm{tr}(AA^T - A^2 - A^TA^T + A^TA)$$

$$= \mathrm{tr}(AA^T) - \mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}((A^2)^T)) + \mathrm{tr}(A^TA) = \mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}(A^2) + \mathrm{tr}(A^TA) = 0$$

onde se usou a hipótese na 4ª igualdade assim como $\mathrm{tr}(X^T)=\mathrm{tr}(X)$; na última igualdade, usou-se $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$ e novamente a hipótese.