Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2024/2025
23 de Janeiro de 2025

Resolução do Exame de Recuperação de ÁLGEBRA LINEAR

Grupo I

1. Usando operações elementares temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 & \alpha+3 \end{array}\right] \xrightarrow{\alpha L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 & \alpha+3 \end{array}\right].$$

(a) Assim, para $\alpha = 1$, o sistema é impossível; para $\alpha \neq 1$ o sistema é indeterminado.
(b) Para $\alpha = -3$, $\mathcal{S} = \{(1,0,0,w) \in \mathbb{R}^4 : w \in \mathbb{R}\}$.

2. Em primeiro lugar, note-se que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \mathbf{0}$ e $\det\left(-3\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\right) = (-3)^3\frac{1}{9} = -3$ onde se usou $\det(SXS^{-1}) = \det(X)$ pelo que a equação é equivalente a $A\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -I$, logo $A = -3\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. $(A^{-1})_{(1,1)} = \frac{(-1)^{1+1}\det(A_{1,1})}{\det A}$. Como $\det A = \det\begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -6$ e $\det(A_{1,1}) = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$, concluímos que $(A^{-1})_{(1,1)} = 0$.

4. Caso exista tal α então: (1) se $\alpha = 0$, temos $Ru = 0$ pelo que $u \in \mathcal{N}(R)$ o que contradiz a hipótese; (2) se $\alpha \neq 0$, então $R^2u = \alpha Ru$ pelo que $0 = \alpha Ru$ usando a hipótese, logo $Ru = 0$ o que contradiz a hipótese.

5. Note que $\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$. O resultado segue pois $\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = 1$ e $\det\begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det AB$.

Grupo II

1. (a) Como $\dim(V_1) = 3$ e $\begin{bmatrix} -y-z-w & y \\ z & w \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de V_1. Temos $V_2 \subset V_1$ pois os geradores de V_2 satisfazem a eq de V_1.
(b) Como $V_2 \subset V_1$, temos $V_1 \cap V_2 = V_2$ e $V_1 + V_2 = V_1$ e $\dim(V_1) = 3$ e $\dim(V_3) = 2$.
(c) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right\}$ é base de V_1; como $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ para $a = -3$ e $b = 0$, as coordenadas são $(a,b) = (-3,0)$.

2. $\lambda = 2$ é o único valor próprio de A com ma$(\lambda) = 5$. Por outro lado, $\dim\mathcal{N}(A-5I) = 4$ (logo temos 4 blocos de Jordan). Portanto $J = \mathrm{diag}(J_2(2), J_1(2), J_1(2), J_1(2))$.

3. O Conjunto V_S é um subespaço linear para cada matriz S, pois por um lado, $\mathbf{0} \in V_S$ pois $S^{-1}\mathbf{0}S$ é diagonal. Por outro lado, se $S^{-1}AS = D_1$ e $S^{-1}BS = D_2$ são matrizes diagonais então $S^{-1}(A+\alpha B)S = D_1 + \alpha D_2$ também uma matriz diagonal, onde α é um escalar.

4. Seja f uma função par e ímpar, então $f(-t) = f(t) = -f(-t)$ pata qualquer t logo $f(-t) = 0$ para qualquer t, logo $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Seja $f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Então $\frac{f(t)+f(-t)}{2}$ é par e $\frac{f(t)-f(-t)}{2}$ é ímpar. Como $f(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} + \frac{f(t)-f(-t)}{2}$ temos $V_1 + V_2 = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e assim $V_1 \oplus V_2 = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Grupo III

1. (a) $T(2,3) = T(1,2) + T(1,1) = 1 + t + 2(1+t) + 2(1-t) = 5 + t$.
(b) $\{(1,0,0),(2,2,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$ pelo que $\{1+t, 4\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$; $\dim\mathcal{I}(T) \neq \dim(\mathcal{P}_2)$, T não é sobrejectiva (logo T não é um isomorfismo)
(c) A eq. linear não tem soluções pois $(1+t+t^2)_{\mathcal{B}_2} = (0,0,1) \notin \mathcal{C}(A)$.

2. Ora, $A^TA = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são 9 e 1 (note que $\det(A^TA) = 9$ e $\mathrm{tr}(A^TA) = 10$). Assim $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como $\{(1,-1)\}$ é uma base de $E_{A^TA}(9) = \mathcal{N}(A^TA - 9I)$ e $\{(1,1)\}$ é uma base de $E_{A^TA}(1) = \mathcal{N}(A^TA - 1I)$, obtemos $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.
Finalmente as 2 colunas de U são $u_1 = \frac{1}{3}Av_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ e $u_2 = Av_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ Assim $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$.

3. $\{u = (1,1,0), v = (1,2,0)\}$ é uma base de V e $\begin{bmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ é semi-definida positiva, logo a aplicação não define um p.i. em V.

4. Note que se X e $X - I$ são definidas positivas então $I - X^{-1}$ (*) também é definda positiva pois $I - X^{-1} = X^{-\frac{1}{2}}(X-I)X^{-\frac{1}{2}}$. Portanto $A - B$ definida positiva implica $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} - I$ definida positiva, logo usando (*) temos $I - B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}$ é definida positiva. O resultado agora segue pois $B^{-1} - A^{-1} = B^{-\frac{1}{2}}(I - B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}})B^{-\frac{1}{2}}$.