Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2024/2025
23 de Janeiro de 2025

EXAME DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR – LEAer

Duração para a recuperação de um só MAP = 40 minutos
Duração para a recuperação de todos os MAPs (Exame) = 120 minutos
Nota do Exame = (Nota do Grupo I + Nota do Grupo II + Nota do Grupo III)/3

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

Grupo I (40 minutos) – 1º MAP

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações lineares $A\mathbf{x}=b$ cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 & \alpha+3 \end{array}\right].$$

   (a) (4.0) Discuta o tipo de solução do sistema linear $A\mathbf{x}=b$ em função de α.

   (b) (3.0) Para $\alpha=-3$, encontre o conjunto solução do sistema linear $A\mathbf{x}=b$.

2. (4.0) Determine, caso existam, todas as matrizes A tais que

$$A\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{2} A = \det\left(-3\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\right) I.$$

3. (5.0) Calcule a entrada $(1,1)$ de A^{-1} onde $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (2.0) Seja $P \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $u \in \mathcal{N}(P^2)$ tais que $u \notin \mathcal{N}(P)$. Verifique se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Pu = \alpha u$.

5. (2.0) Seja A matriz $m\times n$ e B matriz $n \times m$. Mostre que $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix}\right) = \det(AB)$.

Grupo II (40 minutos) – 2º MAP

1. Sejam V_1 e V_2 os seguintes subespaços lineares de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : x+y+z+w=0 \right\} \text{ e } V_2 = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

   (a) (4.0) Determine uma base para V_1 e verifique se $V_2 \subset V_1$.

   (b) (4.0) Calcule $\dim(V_1 \cap V_2)$ e $\dim(V_1 + V_2)$.

   (c) (3.0) Encontre as coordenadas de $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ numa base de V_2 à sua escolha.

2. (5.0) Encontre a matriz J em forma canónica de Jordan associada à matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. (2.0) Seja S matriz 2×2 invertível e considere $V_S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : S^{-1}AS$ é uma matriz diagonal$\}$. Encontre, caso existam, as matrizes S tais que V_S é subespaço linear de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. (2.0) Seja $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o espaço linear das funções reais de variável real t. Considere os subespaços lineares $V_1=\{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(t)=f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ e $V_2=\{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(t) = -f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mostre que $V_1 \oplus V_2 = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Grupo III (40 minutos) – 3º MAP

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear cuja representação matricial é $A = M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{B}_1 = \{(1,2),(1,1)\} \ \text{ e } \ \mathcal{B}_2 = \{1+t,\ 1-t,\ 1+t+t^2\}.$$

   (a) (4.0) Calcule $T(2,3)$.

   (b) (4.0) Encontre uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$ de T e verifique se T é um isomorfismo.

   (c) (2.0) Resolva, em $\mathbb{R}^2$, a equação linear $T(x,y) = 1+t+t^2$.

2. (5.0) Encontre uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. (3.0) Seja $V=L(\{(1,1,0),(1,2,0)\})$. Verifique se a aplicação $\langle (a,b,c),(x,y,z) \rangle = ax+ay+bx+by-2cz$ é um produto interno em V (onde $(a,b,c),(x,y,z) \in V$).

4. (2.0) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definidas positivas tais que $A-B$ é definida positiva. Mostre que $B^{-1}-A^{-1}$ é definida positiva.