Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2023/2024
5 de Janeiro de 2024
(duração 45 minutos)

3º MAP DE ÁLGEBRA LINEAR – LEAer

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1. Seja $T:\mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear cuja representação matricial é $A = M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{B}_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1)\} \text{ e } \mathcal{B}_2 = \{1+t,\ 1-t,\ 1+t+t^2\}.$$

   (a) (4.0) Calcule $T(0,1,1,1)$.

   (b) (3.0) Calcule a distância entre $(0,2,0,0)$ e o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T, usando o produto interno usual.

   (c) (3.0) Resolva, em $\mathbb{R}^4$, a equação linear $T(u) = 6 + 2t + 2t^2$.

2. (5.0) Encontre uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

3. (3.0) Considere o produto interno em $\mathcal{P}_1$ cuja matriz de Gram na base canónica é $G_{Bc} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $T:\mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ tal que $T(p(t)) = \langle p(t), q(t)\rangle\, q(t)$ onde $q(t) = 1+t$. Encontre os valores próprios de T e, caso exista, encontre uma base ortogonal de $\mathcal{P}_1$ constituida por vectores próprios de T.

4. (2.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida positiva. Mostre que $\operatorname{tr}(A)\ \operatorname{tr}(A^{-1}) \geq n^2$.

FIM